Лекции по анализу. Семестр 1.
Ряды и последовательности.

Е. В. Щепин

2008

Оглавление

1 Формальное суммирование рядов

Рядом называется бесконечная последовательность чисел, соединенных знаком сложения. Например, следующий ряд, *обратных квадратов*

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \dots \tag{1.1}$$

содержит все дроби вида $\frac{1}{k^2}$, где k — любое натуральное число. Для сокращенной записи ряда применяется знак суммы $\sum$. В сокращенной записи ряд обратных квадратов выглядит так

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Знак $\sum$ используется и для записи конечных сумм. Общая форма записи суммы с помощью этого знака такова:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{m-1} + a_m \tag{1.2}$$

Здесь через a_k обозначается k-ое слагаемое ($a_k = \frac{1}{k^2}$ для 1.1) так называемый *общий член ряда.* Через m и n обозначаются *пределы суммирования* (нижний и верхний соответственно). В качестве нижнего предела суммирования для рядов применяется в основном единица и ноль, а в качестве верхнего предела — в основном бесконечность. Наконец, k играет роль *индекса суммирования.* Если вместо k подставить любую другую букву это не изменит значения суммы. Для знающих программирование индекс суммирования — это счетчик цикла, значение которого за пределами цикла (суммы) не определено.

Суммирование бесконечного числового ряда является одной из классических задач математического анализа. Так задача суммирования ряда (1.1) была в начале восемнадцатаго столетия одной из самых известных проблем, которую пытались решить многие выдающиеся математики. В 1828 году она была решена великим математиком Леонардом Эйлером, который доказал, что сумма ряда обратных квадратов равна $\pi^2/6$. Позднее мы узнаем, как он получил этот весьма непростой результат.

Эйлер считал, что любой числовой ряд имеет "сумму". И в сегодняшней лекции мы покажем как можно находить суммы бесконечных рядов, предполагая, что на бесконечные суммы распространяются основные арифметические законы такие как ассоциативность сложения и дистрибутивность умножения относительно сложения.

Ахилл и черепаха. Древнегреческий философ Зенон в знаменитой апории "Ахилл и черепаха"утверждал, что Ахилл, преследующий черепаху, никогда не сможет ее настичь, несмотря на то, что его скорость гораздо выше скорости черепахи. Аргументы Зенона, адаптированные к нашим целям, выглядят так.

Пусть скорость черепахи равна $w = 1$ м/сек а скорость Ахилла равна $v = 10$ м/сек. Пусть начальное расстояние между Ахиллом и черепахой равно $d_0 = 100$.

Прежде чем догнать черепаху Ахилл должен преодолеть отделяющее их в начальный момент времени расстояние. Это займет у него время $t_0 = d_0/v$. Но за это время черепаха уползет на расстояние $d_1 = wt_0$.

После этого ситуация повторяется. Теперь между Ахиллом и черепахой расстояние $d_1 = 10$ и прежде, чем Ахилл догонит черепаху он должен преодолеть это расстояние. Это потребует времени $t_1 = d_1/v$, а черепаха успеет отползти на расстояние $d_2 = wt_1$.

Ситуация повторяется бесконечное число раз. И если (на k-ом шагу) расстояние между Ахиллом и черепахой равняется d_k, то расстояние между ними после пробегания Ахиллом расстояния d_k определяется парой *рекуррентных соотношений*

$$t_k = d_k/v \qquad d_{k+1} = ct_k, \tag{1.3}$$

из которой видно, что $d_{k+1} = \frac{w}{v}d_k$. Откуда вытекает, что $d_k = \frac{w^k}{v^k}d_0$. Поэтому суммарное расстояние, которое должен пробежать Ахилл, чтобы догнать черепаху выражается суммой бесконечного ряда чисел.

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_0 \frac{w^k}{v^k}$$

Следовательно, последовательность $\{t_k\}$ также как и последовательность $\{d_k\}$ являются *геометрическими прогрессиями* со знаменателем $\frac{w}{v}$. И время t, необходимое для того, чтобы Ахилл догнал черепаху выражается так:

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + \dots = t_1 + \frac{w}{v}t_1 + \frac{w^2}{v^2}t_1 + \dots = t_1\left(1 + \frac{w}{v} + \frac{w^2}{v^2} + \dots\right)$$

Вопреки Зенону, мы знаем, что в действительности Ахилл догонит черепаху. И совсем нетрудно определить момент времени, в который это произойдет, потому что расстояние между Ахиллом и черепахой убывает с постоянной скоростью $v - w$. Следовательно, оно обратится в нуль через время $t = \frac{d_0}{v-w} = t_1\frac{v}{v-w}$. Сравнивая этот результат с результатом Зенона мы приходим к следующему равенству:

$$\frac{v}{v-w} = 1 + \frac{w}{v} + \frac{w^2}{v^2} + \frac{w^3}{v^3} + \dots \tag{1.4}$$

Бесконечная подстановка. Мы видим, что некоторые бесконечные выражения могут представлять конечные величины. Дробь в левой части уравнения (1.4) развертывается в бесконечный ряд справа.

Бесконечные выражения играют ключевую роль в математике и физике. Решения уравнений часто представляются как бесконечные выражения.

Например, рассмотрим следующее простое уравнение

$$t = 1 + qt \tag{1.5}$$

Подставляя в правую часть $1 + qt$ вместо t, получаем новое уравнение $t = 1+q(1+qt) = 1+q+q^2t$. Любое решение исходного уравнения удовлетворяет и этому. Повторяя этот прием, получаем $t = 1+q(1+q(1+qt)) = 1+q+q^2+q^3t$.

Повторяя его бесконечно много раз уничтожает t в правой части и получаем решение уравнения (1.5) в бесконечной форме:

$$t = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \tag{1.6}$$

С другой стороны, уравнение (1.5), решенное обычным путем дает $t = \frac{1}{1-q}$. В результате мы получаем следующую формулу:

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} q^k, \tag{1.7}$$

которая представляет собой частный случай формулы (1.4) для $v = 1$, $w = q$.

Авторекурсия. Бесконечное выражение вида $a_1+a_2+a_3+\ldots$ называется *рядом* и сокращенно обозначается $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Теперь мы рассмотрим метод суммирования рядов, обратный методу бесконечной подстановки. Чтобы найти сумму ряда мы должны построить уравнение, которому он удовлетворяет. Мы назовем этот метод *авторекурсией*. "Рекурсия" значит "возврат к известному". "Авторекурсия" значит "возврат к самому себе".

Мы будем называть следующее равенство *формулой рекурсии*:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \tag{1.8}$$

Другая основная формула, которую мы используем при авторекурсии называется *формула почленного умножения*:

$$\lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k \tag{1.9}$$

Эти две формулы — все что нам нужно для нахождения суммы геометрической прогрессии $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$. Точнее, формула умножения дает равенство $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k = q \sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$. Следовательно, формула рекурсии превращается в уравнение $x = 1+qx$, где x есть $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$. Решение этого уравнения снова дает нам формулу (1.7) для суммы бесконечной геометрической прогрессии.

Из формулы для бесконечной можно вывести формулу для конечной геометрической прогрессии. Через $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ обозначается сумма $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Получаем

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k - \sum_{k=n}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q} = \frac{1-q^n}{1-q} \tag{1.10}$$

Эта важная формула относится к школьной программе.

Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} kx^k$. Чтобы найти методом авторекурсии сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} kx^k$ мы должны применить дополнительно следующую *формулу почленного сложения*,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \tag{1.11}$$

которая является последней, в сегодняшней лекции общей формулой для рядов.

Переиндексирование ряда $\sum\limits_{k=2}^{\infty} kx^k$ дает ему вид $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(k+1)x^{k+1}$. Далее с помощью формулы сложения он разлагается на две части:

$$x\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)x^k = x\sum_{k=1}^{\infty} kx^k + x\sum_{k=1}^{\infty} x^k = x\sum_{k=1}^{\infty} kx^k + x\frac{x}{1-x}$$

Первое слагаемое представляет собой умноженный на x исходный ряд. Второе — геометрическая прогрессия, сумма которой нам известна. Теперь формула рекурсии для суммы $s(x)$ исходного ряда превращается в уравнение $s(x) = x + x\frac{x}{1-x} + xs(x)$, решением которого служит $s(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Числа Фиббоначчи. Начиная с $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 1$ и применяя рекуррентное соотношение

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \varphi_{n-1}, \tag{1.12}$$

можно построить бесконечную последовательность чисел $0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$, называемых *числами Фиббоначчи*. Сейчас мы получим формулу для φ_n.

Чтобы это сделать рассмотрим следующую функцию $\Phi(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varphi_k x^k$, называемую *производящей функцией* последовательности $\{\varphi_k\}$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k x^k$ суммируем методом авторекурсии

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k x^k = 1+\sum_{k=2}^{\infty} \varphi_k x^k = 1+x\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{k+1} x^k = 1+x\sum_{k=1}^{\infty}(\varphi_k+\varphi_{k-1})x^k = 1+x\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k x^k+x^2\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{k-1}x^{k-1}$$

Откуда

$$\Phi(x) = 1 + x\Phi(x) + x^2\Phi(x)$$

и следовательно, Это дает

$$\Phi(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$$

Корни уравнения $1 - x - x^2 = 0$ суть $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Более знаменита пара обратных величин $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Число $\varphi = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ есть так называемое *золотое сечение*. Оно играет важную роль в математике, архитектуре и биологии. Двойственным к нему является $\hat{\varphi} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Так что $\varphi\hat{\varphi} = -1$, и $\varphi + \hat{\varphi} = 1$.

Следовательно, $(1 - x\varphi)(1 - x\hat{\varphi}) = 1 - x - x^2$, что в свою очередь ведет к следующему разложению:

$$\frac{x}{x^2 + x - 1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \varphi x} - \frac{1}{1 - \hat{\varphi} x} \right)$$

Дроби справа разлагаются в геометрические ряды:

$$\frac{1}{1 - \varphi x} = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k x^k \qquad \frac{1}{1 - \hat{\varphi} x} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\varphi}^k x^k \tag{1.13}$$

Это дает следующее представление для производящей функции

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi^k - \hat{\varphi}^k) x^k$$

С другой стороны коэффициенты при x^k в исходном представлении для $\Phi(x)$ суть φ_k. Следовательно,

$$\varphi_k = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^k - \hat{\varphi}^k) = \frac{(\sqrt{5} + 1)^k + (-1)^k (\sqrt{5} - 1)^k}{2^k \sqrt{5}} \tag{1.14}$$

Эта формула была впервые открыта Эйлером, но стала широко известной только после переоткрытия ее спустя столетие Бине, и называется формулой *Эйлера-Бине*. Ее легко проверить для малых k и доказать по индукции, на основе рекуррентного соотношения.

Теорема единственности. При выводе формулы Эйлера-Бине мы опирались на так называемую *теорему единственности* о совпадении коэффициентов производящих функций. Ниже приведено доказательство Эйлера для этой теоремы.

"Здесь может возникнуть такое сомнение. Если два ряда между собой равны

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \dots = A' + B'z + C'z^2 + D'z^3 + \dots,$$

то следует ли отсюда неизбежно равенство между собой коэффициентов одинаковых степеней z ; т. е. Будет ли $A = A', B = B', C = C', \dots$. Это сомнение легко устранится, если мы примем во внимание, что это равенство должно существовать, какое бы значение ни получило переменное z. Если $z = 0$, то ясно, что $A = A'$. Отняв от обеих частей эти равные члены и разделив оставшееся уравнение на z, получим

$$B + Cz + Dz^2 + \dots = B'z + C'z + D'z^2 + \dots,$$

откуда следует $B = B'$; подобным же образом покажем, что $C = C'$ и т.д. до бесконечности."

2 Положительные ряды

Парадокс расходящегося ряда. Геометрический ряд со знаменателем большим единицы называют *расходящимся.* Рассмотрим расходящийся ряд $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k$. Это геометрический ряд. Мы умеем суммировать его методом авторекурсии. Уравнение авторекурсии для этого ряда имеет вид $s = 1 + 2s$. Единственное число, удовлетворяющее этому уравнению — это -1. Сумма положительных чисел оказывается отрицательной!? Что-то не так!

Ситуацию можно спасти, включив в число возможных решений уравнения авторекурсии бесконечность. Бесконечность является очевидным решением уравнения $s = 1 + 2s$. Сумма любого геометрического ряда $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ со знаменателем $q \geq 1$ очевидным образом бесконечна, не правда ли?

Действительно, ведь эта сумма больше суммы $1+1+1+1+\dots$, символизирующей бесконечность. (Уравнение авторекурсии для суммы $1+1+1+\dots$ есть $s = s + 1$. Бесконечность является ее единственным решением.)

Парадоксы осциллирующего ряда. Философ Гвидо Гранди в 1703 привлек внимание публики к ряду $1-1+1-1+\dots$. Он утверждал, что этот ряд символизирует создание вселенной из ничего. А именно, расстановка в нем скобок одним способом дает Ничто (то есть 0), другим способом дает 1.

$$
\begin{gathered}
(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots = 0+0+0+\cdots = 0 \\
1-(1-1)-(1-1)-(1-1)\cdots = 1-0-0-0\cdots = 1.
\end{gathered}
$$

С другой стороны, ряд $1-1+1-1+1-1+\dots$ является геометрической прогрессией с отрицательным знаменателем $q = -1$. Его уравнение авторекурсии $s = 1 - s$ имеет единственное решение $s = \frac{1}{2}$. Ни $+\infty$ ни $-\infty$ не удовлетворяют этому уравнению. Поэтому $\frac{1}{2}$ представляется его истинной суммой. Мы видим, что сумма бесконечного числа целых чисел может быть нецелой.

Рассуждение Гранди опровергает закон ассоциативности для бесконечных рядов: расстановка скобок может менять сумму ряда $1-1+1-1+\dots$. Следующей жертвой этого ряда является закон коммутативности. Сумма $-1+1-1+1-1+\dots$ равна $-\frac{1}{2}$. Но, последний ряд получается из $1-1+1-1+\dots$ посредством перестановки четных и нечетных членов.

И еще одна неожиданность: разбавление ряда нулями может изменить его сумму. Сумма $1+0-1+1+0-1+1+0-1+\dots$ не равна $\frac{1}{2}$, она равна $\frac{2}{3}$. Действительно, если мы обозначим эту сумму через s, то формула рекурсии дает:

$$
\begin{aligned}
s &= 1+0-1+1+0-1+1+0-1+1+0-1+\dots \\
s-1 &= 0-1+1+0-1+1+0-1+1+0-1+1+\dots \\
s-1-0 &= -1+1+0-1+1+0-1+1+0-1+1+0+\dots
\end{aligned}
$$

Суммируя числа по столбцам (т. е. с помощью формулы сложения рядов), мы получим

$$s + (s-1) + (s-1-0) = (1+0-1) + (0-1+1) + (-1+1+0) + \\ + (1+0-1) + (0-1+1) + (-1+1+0) + \dots$$

Слева стоит $3s-2$. Справа — нулевой ряд. Вот почему $s = \frac{2}{3}$.

Противоречивость формального суммирования. Рассмотрим две суммы $\zeta(s) = 1^s + 2^s + 3^s + \dots$ и $\eta(s) = 1^s - 2^s + 3^s - 4^s + \dots$ В таком случае имеем

$$\zeta(s) - \eta(s) = 2(2^s + 4^s + 6^s + \dots) = 2^{1+s}\zeta(s)$$

Отсюда $\zeta(s)(1 - 2^{1+s}) = \eta(s)$. Так что $\eta(0) = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}$, то $\zeta(0) = (1-2)\eta(0)$. Откуда $\zeta(0) = 1 + 1 + 1 + \dots = -\frac{1}{2}$. Но это противоречит формуле рекурсии.

Во всех парадоксах, связанных с расходящимися рядами участвуют отрицательные числа. Построение непротиворечивой теории бесконечных рядов мы начнем с *положительных рядов* — так мы будем называть ряды, все члены которых положительны.

Определение бесконечной суммы. Один из замечательных результатов Эйлера заключается в доказательстве следующего равенства:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{2.1}$$

Что же означает это равенство? Естественный ответ таков: *частичные суммы* $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, которые содержат все больше и больше обратных квадратов, приближаются все ближе и ближе к величине $\frac{\pi^2}{6}$. В частности все частичные суммы меньше чем $\frac{\pi^2}{6}$, его *полная сумма.* Действительно, если бы некоторая частичная сумма превзошла или совпала с $\frac{\pi^2}{6}$, тогда все последующие суммы удалялись бы от $\frac{\pi^2}{6}$. Далее, любое число c, которое меньше чем $\frac{\pi^2}{6}$, должно быть в конце концов превзойдено частичными суммами, когда они приблизятся к $\frac{\pi^2}{6}$ ближе, чем на $\frac{\pi^2}{6} - c$. Следовательно полная сумма превосходит все частичные суммы и никакое меньшее число не делает этого. Это значит, что *полная сумма есть наименьшее число, превосходящее все частичные суммы.*

Геометрическая мотивировка. Представим последовательность полуинтервалов вещественной прямой $[a_{i-1}, a_i)$. Обозначим через l_i длину i-го полуинтервала. Пусть $a_0 = 0$ есть левый конец первого интервала. Тогда объединение этих интервалов представляет собой полуинтервал $[0, A)$, длина которого (равная A) естественно интерпретируется как $\sum\limits_{i=1}^{\infty} l_i$ сумма длин интервалов последовательности.

Все вышесказанное мотивирует следующее определение.

Определение. *Если частичные суммы положительного ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *неограниченно возрастают, то его сумма определяется как* ∞ *и ряд называется расходящимся. В противном случае ряд называется сходящимся, и его сумма определяется как наименьшее число* A*, для которого* $A \geq \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ *при всех* n.

Будем говорить, что одно множество чисел *мажорирует* другое, если для всякого элемента другого найдется превосходящий его элемент первого.

Тогда определение суммы ряда равносильно следующей паре свойств.

Полная сумма положительного ряда *мажорирует* все его частичные суммы.

Частичные суммы положительного ряда *исчерпывают* его полную сумму, то есть они мажорируют любое число, меньшее полной суммы.

При доказательствах свойств бесконечных сумм мы часто будем использовать следующую теорему, непосредственно вытекающую из определения полной суммы.

Теорема 1 (принцип ограничения). *Если все частичные суммы положительного ряда не превосходят некоторого числа, то и полная сумма не превосходит этого числа.*

Основные операции с рядами. Исходя из данного выше определения, мы можем теперь доказать справедливость, использованных ранее правил обращения с бесконечными рядами для положительных рядов.

Правило рекурсии.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \tag{2.2}$$

Доказательство. Для того, чтобы доказать, что левая часть не превосходит правой, в силу принципа ограничения достаточно при любом n доказать неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \leq a_1 + \sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k$. Справедливость этого легко получить из неравенств $\sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k > \sum\limits_{k=2}^{n} a_k$.

Для доказательства обратного неравенства перенесем a_1 в левую часть. Получим эквивалентное неравенство $\sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k - a_1$, справедливость которого, в силу принципа ограничения вытекает из следующего $\sum\limits_{k=2}^{n} a_k \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k - a_1$. Последнее же верно ввиду неравенства $\sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k \geq \sum\limits_{k=2}^{n} a_k$. □

Правило умножения. Пусть λ является положительным числом, тогда для любого положительного ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ справедливо следующее равенство:

$$\lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k \tag{2.3}$$

Доказательство. Для любой частичной суммы правой части (2.3), в силу дистрибутивности умножения для конечных сумм будет

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k. \tag{2.4}$$

А так как частичная сумма не превосходит полной и $\lambda > 0$, то получаем $\lambda \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \leq \lambda \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, откуда ввиду (2.4), при любом n получаем неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda a_k \leq \lambda \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. В силу принципа ограничения отсюда вытекает, неравенство $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda a_k \leq \lambda \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Противоположное неравенство равносильно следующему $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \geq \frac{1}{\lambda} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda a_k$. Так как любая частичная сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ равна $\frac{1}{\lambda} \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda a_k$, которая не превосходит $\frac{1}{\lambda} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda a_k$, в силу принципа ограничения получаем противоположное неравенство. □

Правило сложения: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k + \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$

Доказательство. Легко доказать, что левая часть не уступает правой. Для этого в силу принципа ограничения, достаточно доказать, что левая часть мажорирует частичные суммы правой. Это так ввиду очевидной цепочки неравенств:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \leq sk1 + a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

.

Для доказательства обратного неравенства мы рассмотрим равносильное

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

В силу принципа ограничения для доказательства последнего достаточно убедиться в неравенствах

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

для частичных сумм. Перепишем последнее в такой форме:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) - \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Но в силу того же принципа ограничения, последнее неравенство является следствием неравенств для частичных сумм

$$\sum_{k=1}^{m} b_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) - \sum_{k=1}^{n} a_k$$

В справедливости которых, после переноса $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ в левую часть, нетрудно убедиться с помощью следующей цепочки неравенств

$$\sum_{k=1}^{m} b_k + \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{m+n} (a_k + b_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$$

□

Геометрический ряд. Вернемся к рассмотрению геометрического ряда. Уравнение авторекурсии, основанное на правиле рекурсии и правиле умножения ничего не говорит о сходимости ряда. Поэтому мы должны доказать сходимость для $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ при положительном $q < 1$. Для этого достаточно доказать при любом n неравенство

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n < \frac{1}{1-q}\,.$$

Умножая обе части на $1 - q$ слева получаем

$$(1-q) + (q - q^2) + (q^2 - q^3) + \cdots + (q^{n-1} - q^n) + (q^n - q^{n+1}) = \\ 1 - q + q - q^2 + q^2 - q^3 + q^3 - \cdots - q^n + q^n - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}$$

и мы получаем 1 справа. Неравенство $1 - q^{n+1} < 1$ очевидно. Итак, сходимость доказана. Теперь уравнение авторекурсии $x = 1 + qx$ для $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ строится обычным путем с помощью правил рекурсии и почленного умножения. Оно оставляет для суммы $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ только две возможности, или $\frac{1}{q-1}$ или ∞. Для $q < 1$ сходимость доказана, а для $q \geq 1$ правильным ответом будет бесконечность.

Наконец мы формулируем теорему, которая по существу принадлежит Евдоксу, доказавшему сходимость геометрического ряда со знаменателем $q < 1$.

Теорема 2 (Евдокс). *Для любого положительного q справедливо*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \textit{для } q < 1, \quad \textit{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \infty \quad \textit{для } q \geq 1.$$

Сравнение рядов Нередко точное суммирование рядов слишком трудно, и для практических целей достаточно знать сумму приблизительно. В этом случае обычно сравнивают рассматриваемый ряд с уже известным. Такое сравнение основано на следующем *Принципе сложения неравенств*, который немедленно следует из определения суммы.

(Сложение неравенств). *Если $a_k \leq b_k$ для всех k, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$*

Для сравнения рядов с геометрическим очень полезна следующая лемма.

Лемма 2.1 (Тест отношения). *Если* $a_{k+1} \leq qa_k$ *для некоторого* $q < 1$ *и всех членов ряда* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, *то* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq \frac{a_0}{1-q}$

Доказательство. По индукции доказывается неравенство $a_k \leq a_0 q^k$. И сложение неравенств позволяет оценить $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ сверху суммой геометрического ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_0 q^k = \frac{a_0}{1-q}$ □

Например, докажем с помощью теста отношения сходимость ряда обратных факториалов $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Отношение соседних членов ряда обратных факториалов равно $\frac{1}{n}$ и, в частности, меньше чем $\frac{1}{2}$, откуда немедленно вытекает его сходимость.

Этот же тест позволяет доказать сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} k2^{-k}$. Отношение последующих членов $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ равно $\frac{k+1}{2k}$. Это отношение не превосходит $\frac{2}{3}$ начиная с $k = 3$. Следовательно ряд, в конце концов мажорируется геометрическим рядом $\sum_{k=0}^{\infty} a_3 \frac{2^k}{3^k}$, $(a_3 = \frac{2}{3})$. Это доказывает его сходимость и уравнение авторекурсии позволяет найти сумму.

Символ бесконечность. Если частичные суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ неограниченно возрастают, то ряд называется расходящимся и его сумма считается бесконечной. Записывается это $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$. Доказательство трех основных правил обращения с рядами были проведены так, что остаются справедливыми для расходящихся рядов, если принять следующие естественные соглашения относительно арифметических операций с символом бесконечность.

1. $\infty + x = \infty$ при любом x, конечном и бесконечном
2. $x \cdot \infty = \infty$ при любом положительном x (конечном или бесконечном)
3. $\infty - x = \infty$ при любом конечном x

Приняв такие соглашения, мы можем оперировать с бесконечностью как с обычным числом, но у бесконечности есть одна особенность: никак нельзя вычитать бесконечность из бесконечности. Результатом такой операции считается неопределенность. Если в ваших вычислениях встретилась такая операция вы сможете получить все что угодно.

Введение символа бесконечность позволяет спасти метод авторекурсии в случае расходящихся рядов. Например, для суммы расходящегося ряда $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots$ уравнение авторекурсии выглядит так:

$$s = 1 + 2s$$

у этого уравнения, с появлением символа ∞ появляется решение $s = \infty$, которое в случае положительного ряда и следует трактовать как единственно верное.

Парадокс гармонического ряда. Теперь мы имеем прочные теоретические основы для вычислений с положительными рядами. Дополним три доказанных выше правила обращения с рядами еще одним *правилом вычитания.*

Теорема 3. *Если при любом k справедливо неравенство $a_k > b_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$, то*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k - b_k)$$

Доказательство. Требуемое равенство добавлением к обеим частям суммы $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ превращается в равносильное равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k - b_k),$$

справедливость которого вытекает из правила почленного сложения рядов. $\square$

Рассмотрим следующее вычисление:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k(2k-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} =$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}\right) =$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k(2k-1)}$$

Мы получаем, что сумма ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)2k}$ удовлетворяет уравнению $s = \frac{s}{2}$. Это уравнение имеет два корня: 0 и ∞. Но s, как нетрудно понять, удовлетворяет неравенствам $\frac{1}{2} < s < \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$. Где ошибка?

Рассмотренный выше парадокс обусловлен расходимостью гармонического ряда. Ввиду этой расходимости не выполнены условия теоремы о почленном вычитании и приведенное рассуждение по сути является строгим доказательством расходимости гармонического ряда.

Дадим более явное доказательство этой расходимости.

Для всякого натурального числа n обозначим через $[\log n]$ целую часть двоичного логарифма n. Тогда имеем неравенства

$$2^{[\log n]} \leq n < 2^{[\log n]+1}$$

Поэтому гармонический ряд почленнно мажорирует следующий ряд:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{[\log n]+1}}$$

Так как целая часть логарифма n равна k когда n пробегает значения от 2^k до $2^{k+1}-1$, то при любом натуральном k имеется ровно 2^k членов этого ряда равных $\frac{1}{2^{k+1}}$ с суммой $\frac{1}{2}$. Поэтому этот ряд, а, вместе с ним и гармонический, расходится.

3 Суммирование массивов.

Не всегда числа, которые подлежат суммированию, имеют структуру ряда, то есть образуют последовательность. Приходится также суммировать числа заполняющие бесконечные таблицы (двойные ряды) и более сложные структуры. Так (прямое) произведение двух числовых рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ имеет структуру *двойного ряда* $\sum\limits_{j,k=1}^{\infty} a_j b_k$, а прямое произведение двойного ряда на обычный имеет структуру тройного ряда и т.д. Элементы двойного ряда индексируется парами натуральных чисел, тройного — тройками и т.д. Иногда рассматриваются ряды индексированные целыми числами,как положительными, так и отрицательными. Чтобы развить теорию включающую в себя все перечисленные возможности вводится общее понятие *числового массива* как индексированного множества чисел $\{a_i\}_{i\in I}$ с индексным множеством I произвольной природы.

Сумма неупорядоченного массива. Рассмотрим массив $\{a_i\}_{i\in I}$ неотрицательных чисел, индексированный элементами произвольного множества I.

Любая сумма типа $\sum\limits_{i\in K} a_i$, где K — конечное подмножество в I называется *частичной* суммой массива $\{a_i\}_{i\in I}$ по K.

Определение. *Наименьшее число, мажорирующее все частичные суммы массива $\{a_i\}_{i\in I}$ называется его (полной) суммой и обозначается $\sum\limits_{i\in I} a_i$*

Принцип ограничения для неупорядоченных чстичных сумм остается в силе. То есть *если некоторое число мажорирует все частичные суммы числового массива, то оно мажорирует и его полную сумму.*

Коммутативность. В случае $I = \mathbb{N}$ мы, на первый взгляд, получили новое определение суммы. Но, к счастью, это определение равносильно прежнему. Действительно, любая неупорядоченная частичная сумма не превосходит упорядоченной частичной суммы содержащей слагаемое неупорядоченной суммы с наибольшим номером, а значит, не превосходит полной (упорядоченной) суммы. Значит и полная неупорядоченная сумма поэтому также не превосходит полной упорядоченной. С другой стороны, любая упорядоченная частичная сумма может рассматриваться как неупорядоченная. Это влечет противоположное неравенство. Следовательно мы установили равенство.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$$

Это означает, что положительные ряды подчиняются закону коммутативности сложения. Потому что неупорядоченная сумма, очевидно, не зависит от порядка слагаемых.

Формула сложения.

$$\sum_{t\in T} a_t + \sum_{t\in T} b_t = \sum_{t\in T}(a_t + b_t) \tag{3.1}$$

безусловно справедлива для положительных массивов и доказывается точно также как для рядов.

Формула объединения В случае, когда индексное множество T распадается в объединение пары непересекающихся множеств $T = T_1 \cup T_2$, то имеет место равенство, называемое *формулой объединения*

$$\sum_{t\in T} a_t = \sum_{t\in T_1} a_t + \sum_{t\in T_2} a_t \tag{3.2}$$

Доказательство формулы объединения совершенно аналогично доказательству формулы сложения. Формулу объединения также можно вывести из последней с помощью следующего трюка. Обозначим через $\chi_i(t)$ функцию равную нулю при $t \notin T_i$ и равную единице при $t \in T_i$ (*характеристическая функция* множества T_i). Тогда очевидно

$$\sum_{t\in T_i} a_t = \sum_{t\in T} a_t\chi_i(t)$$

Поэтому правая часть в (3.2) равна

$$\sum_{t\in T} a_t\chi_1(t) + \sum_{t\in T} a_t\chi_2(t) = \sum_{t\in T} a_t(\chi_1(t) + \chi_2(t)) = \sum_{t\in T} a_t$$

ибо $\chi_1(t) + \chi_2(t)$ тождественно равно единице.

Формула бесконечного объединения Семейство попарно непересекающихся $I_k \cap I_j = \varnothing$ подмножеств $\{I_k\}_{k\in K}$ множества I, объединение которых дает все $I = \bigcup_{k\in K} I_k$ называется *разбиением* множества I и записывается $\bigsqcup_{k\in K} I_k$.

Теорема 1 (объединения сумм). *Для любого разбиения $I = \bigsqcup_{j\in J} I_j$ индексного множества $\{a_i\}_{i\in I}$ неотрицательных чисел имеет место безусловное равенство*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} a_i. \tag{3.3}$$

Доказательство. Если множество I конечно, то справедливость формулы объединения сумм можно вывести по индукции из сочетательного закона арифметики. Мы оставляем это читателю в качестве упражнения и начнем с доказательства *формулы конечного объединения*, то есть формулы объединения для конечного J (и бесконечного I).

Доказательство ведем индукцией по числу элементов J. Если J состоит из двух элементов, то доказательство формулы объединения было дано выше. Пусть формула объединения справедлива для n-элементного J и пусть множество J содержит $n+1$ элемент $J = \{j_0, j_1, \dots, j_n\}$. Положим $J_1 = \{j_1, \dots, j_n\}$ и

$I_1 = \bigcup\limits_{j\in J_1} I_j$. Тогда J_1 содержит n элементов и, по предположению индукции имеет место равенство

$$\sum_{i\in I_1} a_i = \sum_{j\in J_1}\sum_{i\in I_j} a_i. \tag{3.4}$$

В силу справедливости формулы объединения для пары массивов имеем

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I_1} a_i + \sum_{i\in I_{j_0}} a_i \tag{3.5}$$

Подставляя в (3.5) вместо $\sum\limits_{i\in I_1}$ его представление в виде суммы (3.4) получаем формулу объединения для J.

Итак, формула конечного объединения сумм доказана. Пусть теперь J бесконечно. Докажем, что левая часть равенства (3.3) не превосходит правой. В силу принципа ограничения достаточно доказать это для частичных сумм.

Пусть I' произвольное конечное подмножество индексного множества I. Положим $I'_j = I_j \cap I'$ и обозначим через J' — множество тех $j \in J$, для которых $I'_j \neq$. Тогда, в силу справедливости формулы объединения для конечных множеств имеем для частичной суммы

$$\sum_{i\in I'} a_i = \sum_{j\in J'}\sum_{i\in I'_j} a_i = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I'_j} a_i$$

Но сумма справа почленно мажорируется повторной суммой $\sum\limits_{j\in J}\sum\limits_{i\in I_j} a_i$, откуда, в силу принципа ограничения, получаем, что и полная сумма $\sum\limits_{i\in I} a_i$ не превосходит повторной.

Доказательство обратного неравенства достаточно провести для любой частичной суммы $\sum\limits_{j\in J'}\sum\limits_{i\in I_j} a_i$ с конечным J'. Но в этом случае для $I' = \bigcup\limits_{j\in J'} I_j$ формула конечного объединения дает

$$\sum_{j\in J'}\sum_{i\in I_j} a_i = \sum_{i\in I'} a_i$$

Последняя же сумма, очевидно, не превосходит суммы $\sum\limits_{i\in I} a_i$, потому что все ее частичные суммы являются и частичными суммами последней. □

Формула прямого произведения *Прямым произведением* числовых массивов $\sum\limits_{i\in I} a_i$ и $\sum\limits_{j\in J} b_j$ называется массив $\sum\limits_{i,j\in I\times J} a_i b_j$.

Теорема 2. *Для любых сходящихся числовых массивов их прямое произведение сходится и выполнено равенство*

$$\sum_{i,j\in I\times J} a_i b_j = \left(\sum_{j\in J} b_j\right)\left(\sum_{i\in I} a_i\right)$$

Если же один из массивов-множителей расходится, а другой отличен от нуля, то их прямое произведение также расходится

Доказательство. Двойная сумма $\sum\limits_{i,j\in I\times J} a_i b_j$, как нам известно, равна повторной сумме

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_i b_j$$

Поскольку во внутренней сумме множитель a_i не зависит от индекса суммирования, постольку его можно вынести за знак внутренней суммы и получить

$$\sum_{i,j\in I\times J} a_i b_j = \sum_{i\in I}\left(a_i \sum_{j\in J} b_j\right)$$

Теперь заметим, что внутренняя сумма не зависит от индекса суммирования внешней суммы и потому может быть вынесена за пределы внешней суммы, как постоянный множитель. В итоге получаем формулу умножения из формулировки теоремы. □

Абсолютная сходимость Числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд абсолютных величин $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Аналогично определяется понятие абсолютно суммируемого числового массива. Для абсолютно сходящихся рядов и абсолютно суммируемых массивов естественно определенное понятие суммы ряда (массива) удовлетворяет всем свойствам, установленным ранее для положительных рядов (массивов).

Для любого вещественного числа x определим два неотрицательных числа его *положительную* x^+ и *отрицательную* x^- *части* как

$$x^+ = \frac{x+|x|}{2} \qquad \text{и} \qquad x^- = \frac{|x|-x}{2}.$$

Следующие тождества характеризуют положительную и отрицательную части x

$$x^+ + x^- = |x| \qquad x^+ - x^- = x \tag{3.6}$$

Теперь сумма абсолютно сходящегося ряда вещественных чисел определяется так:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- \tag{3.7}$$

Иными словами из суммы всех положительных слагаемых вычитается сумма модулей отрицательных слагаемых. Ряды в правой части сходятся ввиду неравенств $a_k^+ \le |a_k|$, $a_k^- \le |a_k|$ и условия $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$.

Так как для любого x имеем очевидные тождества:

$$(-x)^+ = x^- \qquad (-x)^- = x^+, \tag{3.8}$$

то непосредственно из определения абсолютной суммы вытекает следующее *правило изменения знака*:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-a_k) = -\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{3.9}$$

Более хлопотно доказывается формула почленного сложения.

Теорема 3 (о почленном сложении-вычитании). *Для любой пары абсолютно сходящихся рядов* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *их почленные сумма* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)$ *и разность* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k-b_k)$ *абсолютно сходятся и имеет место равенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k. \tag{3.10}$$

Доказательство. Во-первых заметим, что абсолютная сходимость рядов в левой части вытекает из модульного неравенства $|a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k|$ и абсолютной сходимости рядов в правой части.

Рассмотрим сначала случай суммы. Представляя все суммы в (9.2) в виде разностей их положительных и отрицательных частей и разводя положительные и отрицательные члены в разные стороны, равенство (9.2) преобразуем в

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^+ + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)^- = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^- + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)^+$$

Но это равенство верно в силу правила почленного сложения для положительных рядов и следующего тождества,

$$x^- + y^- + (x+y)^+ = x^+ + y^+ + (x+y)^-$$

Перестановкой членов это тождество превращается в

$$(x+y)^+ - (x+y)^- = (x^+ - x^-) + (y^+ - y^-),$$

что верно в силу тождества $x^+ - +x^- = x$.

Поскольку вычитание сводится к сложению с вычитаемым, взятым с обратным знаком, постольку теорема о почленном сложении и правило изменения знака суммы влекут теорему о почленном вычитании. □

Теорема 4 (умножения). *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *абсолютно сходится, то для любого вещественного* c *абсолютно сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ca_k$ *и имеет место равенство* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ca_k = c\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Доказательство. Правило умножения для положительных чисел дает доказательство первого утверждения теоремы $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|cz_k| = \sum\limits_{k=1}^{\infty}|c||z_k| = |c|\sum\limits_{k=1}^{\infty}|z_k|$. Дальнейшее доказательство разбивается на два случая. Если $c > 0$, то $(ca_k)^+ = ca_k^+$ и почленное умножение для положительных рядов дает

$$\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = \sum_{k=1}^{\infty}(ca_k)^+ - \sum_{k=1}^{\infty}(ca_k)^- = c\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - c\sum_{k=1}^{\infty} a_k^- =$$

$$c\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-\right) = c\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Если $c < 0$, то умножение на c может быть выполнено в два этапа: умножение на модуль c и изменение знака. В силу, доказанного выше умножение на абсолютную величину можно выполнять почленно, а умножение на минус единицу можно делать почленно в силу правила изменения знака. $\square$

Для неупорядоченных массивов теория абсолютной суммируемости развивается полностью аналогично. Основной результат этой теории: представляет формула (бесконечного) объединения.

Теорема 5. *Если множество I разбито на непересекающиеся подмножества $I_j, j \in J$ и $\sum\limits_{i \in I} |a_i| < \infty$, то имеет место равенство*

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} a_i, \tag{3.11}$$

все суммы которого являются суммами абсолютно суммируемых массивов.

Доказательство. Прежде всего отметим, теорема об объединении положительных сумм дает равенство

$$\sum_{i \in I} |a_i| = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} |a_i|,$$

из которого вытекает абсолютная суммируемость всех массивов, участвующих в формуле 3.11. Доказательство справедливости этой формулы проводится следующей выкладкой: $\square$

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I} a_i^+ - \sum_{i \in I} a_i^- &= \\
&= \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} a_i^+ - \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} a_i^- = \\
&= \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} (a_i^+ - a_i^-) = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} a_i.
\end{aligned}$$

Первая строчка в приведенной выкладке представляет собой определение, равенство первой и второй строк вытекает из теоремы о разбиении положительных сумм, переход к третьей — посредством теоремы о почленном вычитании.

4 Натуральный логарифм

Умножение чисел существенно более трудоемкая операция, чем сложение. Логарифмы позволяют свести умножение к сложению. Изобретение логарифмов является одним из самых замечательных достижений человечества. Это изобретение облегчило труд и существенно увеличило производительность этого труда сотням тысяч ученых и инженеров. В античные времена, когда логарифмы были неизвестны, вместо них использовались косинусы. Следующее тождество

$$2\cos x \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$$

может быть применено для вычисления произведений с помощью таблиц косинусов. Чтобы перемножить числа x и y, их представляют косинусами $x = \cos a$, $y = \cos b$ с помощью таблиц косинусов. Потом вычисляют $(a+b)$ и $(a-b)$ и находят их косинусы по таблицам. Наконец результаты складываются и делятся пополам. Итак одно умножение требует 4 поисков по таблицам косинусов, двух сложений, одного вычитания и деления пополам.

Идея логарифмов впервые появилась в 1544 году, когда M. Stiefel сравнил геометрическую и арифметическую прогрессии. Сложение показателей соответствует умножению степеней. Рассмотрим число q, близкое к единице, например $q = 1.000001$. Вычислим последовательность степеней этого числа и поместим их в левую колонку. Поместим в правую колонку соответствующие величины показателей и логарифмическая таблица готова. Теперь для того, чтобы перемножить два числа x и y, их (или их приближения) находят в левой колонке логарифмической таблицы, то есть представляют в виде степеней q, далее берут из правой колонки значения их логарифмов, то есть показателей степеней. Далее сумму логарифмов находят в правой колонке и напротив этой суммы находится произведение xy. То есть одно умножение с помощью таблицы логарифмов требует трех поисков в таблице логарифмов и одного сложения, что существенно легче, чем требовалось при умножении с помощью таблиц косинусов.

Первые таблицы логарифмов были составлены Джоном Непером в 1614 году. Он использовал $q = 1.000000001$. При использовании таблиц с $q = 1.000000001$, естественно изменить масштаб в соотношении $1000000000 : 1$, так чтобы для чисел диапазона 1-10 логарифмы тоже были из диапазона 0-10, а не исчислялись бы миллионами. Такое изменение масштаба означает переход от основания 1.000000001 к его миллиардной степени. То есть число $1.000000001^{1000000000} = 2.718281828\ldots$ имеет в этой таблице логарифм 1. Заметим, что масштабирование правой колонки, то есть умножение всех логарифмов на одно и тоже число не влияет на основное свойство этой таблицы — сведение умножения к сложению и даже не меняет алгоритма вычислений произведения с помощью таблицы.

Замечательным фактом является то, что при увеличении числа знаков в логарифмической таблице типа Непера, значение числа $1.000\ldots01^{1000\ldots0}$ очень мало меняется с ростом числа нулей и быстро сходится к некоторому пределу, иногда называемому *числом Непера*. Это число впервые ввел в математику и обозначил его e, великий математик восемнадцатого столетия Леонард Эйлер. Логарифмы с основанием e называются *натуральными*. Натуральный логарифм числа x обозначается $\ln x$.

Следующими после таблиц натуральных логарифмов появились таблицы десятичных логарифмов, составленные Бриггсом (1624). Чтобы составить эти таблицы Бриггс вычислял корень из 10, корень из корня из десяти, корень из корня из корня из десяти и так далее 64 раза вплоть до корня степени 2^{64} из десяти. И этот число он и принимал за q — первое число таблицы логарифмов. При этом правую колонку он масштабировал умножением на 2^{64}, так чтобы 10 имело логарифм равный 1.

Логарифм числа b по основанию a обозначается $\log_a b$ и определяется равенством:

$$a^{\log_a b} = b \tag{4.1}$$

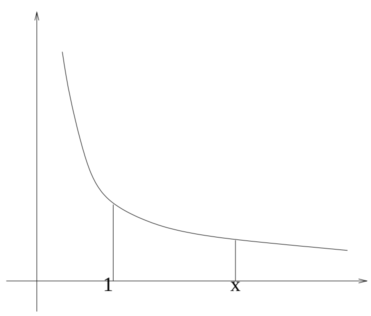
Для того, чтобы найти этот логарифм, обозначаемый $\log_a b$ с помощью таблицы логарифмов, мы находим по таблице $\log a$ и $\log b$. Тогда $a = q^{\log a}$ и $b = q^{\log b}$ (при этом $\log a$ и $\log b$ целые), поэтому получаем для c уравнение $\left(q^{\log a}\right)^c = \left(q^{c\log a}\right) = q^{\log b}$, откуда $c = \frac{\log b}{\log a}$. Таким образом мы получаем следующую формулу, известную под именем *золотого правила*:

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a} \tag{4.2}$$

В этой формуле логарифмы в правой части могут иметь любое основание. Таким образом для определения логарифмов по разным основаниям достаточно иметь определение логарифма по какому-то одному основанию. Логарифм по любому основанию обладает следующим свойством, называемым *основным свойством логарифмов*

$$\log xy = \log x + \log y \tag{4.3}$$

Гиперболические логарифмы. Фигура ограниченная сверху графиком гиперболы $y = 1/x$, снизу — отрезком $[a, b]$ оси абсцисс, а слева и справа вертикальными отрезками, проходящими через концы этого отрезка, называется *гиперболической трапецией* над отрезком $[a, b]$ или с основанием $[a, b]$.



Геометрическая прогрессия точек деления дает арифметическую прогрессию площадей гиперболических трапеций. Это значит, что площадь под гиперболой есть логарифм. Это открытие было сделано английским математиком Грегори в 1647 году.

Гиперболическим логарифмом числа $x \geq 1$ называется площадь гиперболической трапеции с основанием $[1, x]$. Гиперболический логарифм числа x обозначается $\ln x$.

Гиперболический поворот. Доказательства основных свойств гиперболического логарифма основаны на использовании гиперболического поворота. А именно, *гиперболическим поворотом* с коэффициентом k называется преобразование плоскости, задаваемое в декартовых координатах формулой $(x, y) \to (kx, y/k)$. Гиперболический поворот не меняет площади никакого прямоугольника со сторонами параллельными осям координат. Вообще, гиперболический поворот не меняет площади никакой фигуры, поскольку ее можно аппроксимировать фигурами, составленными из прямоугольников, параллельных осям координат. Более подробно это свойство гиперболического поворота будет обосновано ниже.

Теорема 1 (о гиперболических логарифмах). *Гиперболический логарифм является монотонно возрастающей функцией, определенной для всех $x \geq 1$ и при любых x и y удовлетворяет соотношению*

$$\ln xy = \ln x + \ln y. \tag{4.4}$$

Доказательство. Пусть $x, y > 1$. Так как гиперболический поворот с коэффициентом y переводит гиперболическую трапецию над $[1, x]$ в гиперболическую трапецию над $[y, xy]$. Поскольку площадь первой равна $\ln x$, а второй — $\ln xy - \ln y$, постольку получаем $\ln xy = \ln x + \ln y$.

□

Логарифмы чисел меньших единицы Теперь мы определим логарифмы чисел меньших единицы таким образом, чтобы основное свойство логарифмов 4.4 выполнялось для всех положительных чисел.

Теорема 2. *Существует единственная функция определенная множестве положительных чисел, совпадающая с логарифмом для чисел больших единицы и переводящая произведение в сумму.*

Доказательство. Определим $\ln(x)$ для числа меньшего единицы равенством

$$\ln 1/x = -\ln x \tag{4.5}$$

Докажем, что полученная функция удовлетворяет основному логарифмическому тождеству. Рассмотрим случай $x < 1$, $y < 1$. Тогда $1/x > 1$ и $1/y > 1$ и, согласно теореме 4.6 имеем $\ln 1/xy = (\ln 1/x + \ln 1/y)$. Заменяя все члены этого уравнения согласно (4.5), получаем $-\ln xy = -\ln x - \ln y$ и, далее, $\ln xy = \ln x + \ln y$.

Следующий случай $x > 1$, $y < 1$, $xy < 1$. Так как и $1/x$ и xy меньше единицы, то по доказанному выше случаю $\ln xy + \ln 1/x = log\frac{xy}{x} = \ln y$. Заменяя $\ln 1/x$ на $-\ln x$, получаем $\ln xy - \ln x = \ln y$ и, наконец, $\ln xy = \ln x + \ln y$.

Последний случай, $x > 1$, $y < 1$, $xy > 1$ доказывается через $\ln xy + \ln 1/y = \ln x$ и замену $\ln 1/y$ by $-\ln y$.

Тем самым наша теорема доказана в части существования. Предположим теперь, что $l(x)$ какая-то функция? совпадающая с $\ln x$ при $x \geq 1$, удовлетворяет основному свойству логарифмов. То есть $l(xy) = l(x) + l(y)$ для любых $x, y > 0$. Тогда, полагая $y = 1/x$, получаем $0 = l(1) = l(x) + l(1/x)$. Откуда получаем $l(x) = -l(1/x)$ и, значит $l(x) = \ln x$ и для $x < 1$.

□

Площадь криволинейной трапеции. Сейчас мы более подробно проанализируем понятие площади гиперболической и более общей криволинейной трапеции так чтобы строго доказать использованное выше утверждение о том, что гиперболический поворот сохраняет площади гиперболических трапеций.

Пусть $f(x)$ неотрицательная монотонно убывающая функция определенная на отрезке $[a, b]$. *Криволинейной трапецией* называется фигура $T_f^{a,b} = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$. Возрастающая последовательность $x_0, x_1, x_2 \dots x_n$ точек отрезка $[a, b]$ начинающаяся с $x_0 = a$ и кончающаяся $x_n = b$ называется *разбиением* отрезка $[a, b]$.

Поскольку наша функция является монотонно убывающей для любого отрезка $[x, y]$ лежащего в $[a, b]$ прямоугольник высоты $f(x)$ с основанием $[x, y]$ содержит трапецию $T_f^{x,y}$, а прямоугольник высоты $f(y)$ содержится в ней. (см. рисунок). Первый прямоугольник называется *описанным*, а второй — *вписанным* в эту трапецию.

Объединение вписанных прямоугольников с основаниями $[x_i, x_{i+1}]$ соответствующими некоторому разбиению отрезка называется *вписанным мультипрямоугольником* соответствующей разбиению $\{x_i\}_{i=0}^n$. Аналогично определяется *описанный мультипрямоугольник.*

Площади вписанного и описанного мультипрямоугольников выражаются формулами

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_i) \qquad \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_{i-1})$$

Лемма 4.1. *Площадь криволинейной трапеции исчерпывается площадями вписанных мультипрямоугольников, то есть всякое число меньшее площади криволинейной трапеции мажорируется площадью некоторого вписанного мультипрямоугольника.*

Доказательство. Пусть площадь криволинейной трапеции равна S и дано $\varepsilon > 0$. Докажем, что найдется вписанный мультипрямоугольник площади $> S - \varepsilon$. Рассмотрим разбиение основания трапеции на N равных частей. Площади описанного и вписанного мультипрямоугольников в этом случае выражаются формулами

$$s_N = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\frac{b-a}{N}, \qquad S_N = \sum_{i=1}^{N} f(x_{i-1})\frac{b-a}{N}$$

Тогда их разность $S_N - s_n$ выражается формулой $\sum\limits_{i=1}^{N}(f(x_i) - f(x_{i-1})\frac{b-a}{N} = (f(b) - f(a))\frac{b-a}{N}$. Откуда при $N > (f(b) - f(a))(b - a)/\varepsilon$ получаем, что эта разность меньше ε. Но $S_N > S$, поэтому и $S - s_N < \varepsilon$. □

Доказательство леммы о гиперболическом повороте. Пусть гиперболическая трапеция площади S перешла в результате применения гиперболического поворота в трапецию площади S'. Предположим $S > S'$. Тогда, в силу леммы 4.1 найдется вписанный в первую трапецию мультипрямоугольник площади S_1 большей, чем S'. Но тогда гиперболический поворот переведет его в мультипрямоугольник той же площади вписанный во вторую трапецию. Получаем, что вписаный мультипрямоугольник имеет площадь большую, чем содержащая его трапеция. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Базовые оценки логарифма. Из определения логарифма как площади под гиперболой вытекают такие оценки:

$$\frac{x}{1+x} \leq \log(1+x) \leq x \qquad (0 < x < 1) \tag{4.6}$$

Действительно, при $x > 0$ гиперболическая трапеция с основанием $[1, 1+x]$ содержится в (описанном) прямоугольнике шириной x и высотой 1 и содержит (вписанный) прямоугольник шириной x и высотой $\frac{1}{1+x}$ равной минимальному значению гиперболы в этом интервале и принимаемому в его правом конце. А базовые оценки логарифма представляют собой не что иное как площади вписанного (нижняя) и описанного (верхняя) прямоугольников.

При $x < 0$ площадь описанного прямоугольника задается той же формулой, что площадь вписанного для $x < 0$ но со знаком минус, потому что ширина прямоугольников теперь выражается как $-x$. Сам логарифм в этом случае выражается взятой со знаком минус площадью гиперболической трапеции. В результате двойного изменения на противоположные неравенства остаются в силе.

Основание натуральных логарифмов. Основание гиперболических (или натуральных) логарифмов является числом, играющим фундаментальную роль в математике. Оно обозначается буквой e и определяется как такое число, для которого площадь гиперболической трапеции с основанием $[1, e]$ единична. Рассмотрим геометрическую прогрессию q^n для $q = 1 + \frac{1}{n}$. Все слагаемые соответствующей последовательности описанных прямоугольников равны $\frac{q^{k+1}-q^k}{q^k} = q - 1 = \frac{1}{n}$. Следовательно интервал $[1, q^n]$ равен 1 и больше чем $\log q^n$. Следовательно $e > q^n$. Слагаемые площадей вписанных прямоугольников в этом случае равны $\frac{q^{k+1}-q^k}{q^{k+1}} = 1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{n+1}$. Следовательно их сумма над интервалом $[1, q^{n+1}]$ равна 1. Она меньше чем соответствующий логарифм. Следовательно $e < q^{n+1}$. Так мы доказали следующие оценки для e:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \tag{4.7}$$

Мы убедились, что $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ быстро стремится к e когда n стремится к бесконечности.

5 Функциональные уравнения

Экспонента Логарифм неограниченно возрастает и строго монотонен. Поэтому он принимает и ровно один раз любое числовое значение. То есть уравнение $\ln x = a$ имеет при любом a единственное (и положительное) решение, которое называется *экспонентой* числа a и обозначается $\exp a$. Таким образом определяется обратная функция к логарифму, называемая экспонентой. То есть для любого x имеет место равенство

$$\ln \exp x = x \tag{5.1}$$

Основным свойством экспоненты является следующее правило сложения

$$\exp(x+y) = \exp x \exp y \tag{5.2}$$

Для доказательства этого равенства его логарифмируем. Логарифм левой части равен $x+y$ в силу (5.1). А логарифм правой равен сумме логарифмов множителей, которые равны x и y соответственно. Таким образом логарифмы обеих частей равны, а значит и сами они совпадают

Экспонента возрастающая функция и ее график выглядит так.

Показательная функция.

Теорема 1 (о показательной функции). *Для любого отличного от единицы числа a существует единственная определенная на всей прямой функция a^x обладающая следующими свойствами*

1. $a^1 = a$
2. a^x *монотонна*
3. $a^{x+y} = a^x a^y$ *для любых* x, y.

Эта функция имеет обратную обозначаемую $\log_a x$*, которая определена для всех положительных* x.

Для доказательства нам потребуется следующее важное свойство чисел.

Лемма 5.1 (Всюду плотность рациональных чисел). *Между любыми двумя вещественными числами лежит некоторое рациональное.*

Доказательство. Пусть $x > y$ два числа. Возьмем натуральное число n большее чем $\frac{1}{x-y}$. Пусть $r = \frac{[ny]}{n}$. Тогда r рационально и $y \le r \le x$. Теперь для того чтобы найти рациональное число лежащее внутри интервала (x, y) применим предыдущее рассуждение к паре $x' = x - (x-y)/3$ и $y' = y + (x-y)/3$. $\square$

Лемма 5.2 (о тождественной функции). *Если $f(x) = x$ для всех рациональных x и $f(x)$ монотонна, то $f(x) = x$ всегда.*

Доказательство. Предположим напротив, что $f(x) \neq x$ для некоторого x. Пусть, например, $f(x) > x$. Пусть r рациональное число из интервала $(x, f(x))$. Тогда $r > x$ и из монотонности имеем $f(r) > f(x)$, но $f(r) = r$, получаем противоречие с выбором $r < f(x)$. Аналогично приводится к противоречию случай $f(x) < x$ $\square$

Теорема 2 (о линейной функции). *Если монотонная функция $f(x)$ при любых x, y удовлетворяет соотношению $f(x+y) = f(x) + f(y)$, то при любом x будет $f(x) = kx$ для $k = f(1)$.*

Доказательство. Обозначим через k значение функции f в точке 1. Докажем, что $f(x) = kx$ для всех рациональных x. Из линейности по индукции доказывается следующее равенство $f(nx) = nf(x)$ для любого натурального n. Подставляя в это равенство x/n вместо x получаем $f(x/n) = f(x)/n$. Применяя последовательно оба получаем $f(m/n) = mf(1/n) = \frac{m}{n}f(1) = \frac{m}{n}k$.

Теперь тождественность функции $f(x)/k$ вытекает из леммы о тождественной функции что и доказывает нашу теорему. $\square$

Доказательство теоремы о показательной функции. Как нетрудно получить из известных нам свойств экспоненты и натурального логарифма, всем сформулированным требованиям удовлетворяет функция $\exp(x \log a)$. Таким образом существование показательной функции установлено. Докажем единственность. Предположим, что a^x какая-то показательная функция. Тогда ее композиция с натуральным логарифмом будет линейной функцией в силу теоремы о линейной функции. $\log a^x = \log(a^1)x$. Поскольку $a^1 = a$ взятие экспоненты от обеих частей дает $a^x = \exp x \log a$, что и требовалось доказать. Обратная к a^x функция определяется как $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$. Проверка предоставляется читателю. $\square$

Теорема 3 (о логарифме степени). *Для любых $a > 0$ и b справедливо равенство* $\ln a^b = b \ln a$

Доказательство. Рассмотрим отношение $\ln a^x / \ln a$ эта функция удовлетворяет условиям теоремы **??** и наше утверждение для $x \geq 0$ прямо из этой теоремы следует. Для отрицательного b имеем $a^b = \frac{1}{a^{-b}}$. Откуда $\ln a^b = -\ln a^{-b} = -(-b) \ln a = b \ln a$. $\square$

Основные свойства операции возведения в степень собраны ниже. Свойства степени

$$\left(a^b\right)^c = a^{(bc)} \qquad a^{b+c} = a^b a^c \qquad (ab)^c = a^c b^c \qquad \log_a b = \frac{\log a}{\log b}$$

Логарифмы по различным основаниям. Если в определении логарифмов вместо гиперболы $xy = 1$ использовать гиперболу $xy = k$ с $k \neq 1$, то получиться функция тоже удовлетворяющая основному свойству логарифмов, отличающаяся от натурального логарифма постоянным множителем. Все такие функции тоже называются логарифмами и различаются своими основаниями. *Основанием* логарифма называется число логарифм которого равен единице. Логарифм числа x с основанием a обозначается $\log_a x$.

Из теоремы о логарифме степени немедленно вытекает *золотое правило* Эйлера. А именно, логарифмируя тождество $a^{\log_a b} = b$, получаем

$\log_a b \ln a = \ln b$. Откуда $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$. То есть логарифм по любому основанию выражается через натуральный логарифм.

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \tag{5.3}$$

Наряду с натуральными логарифмами часто применяются десятичные и двоичные (в информатике) логарифмы. Десятичный логарифм имеет специальное обозначение lg. Десятичный логарифм позволяет определить количество десятичных знаков используемых для записи целого числа.

Гиперболические синус и косинус *Гиперболические синус* $\operatorname{sh} x$ и *косинус* $\operatorname{ch} x$ определяются следующими формулами

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{5.4}$$

Их свойства в значительной степени аналогичны свойствым обычных синуса и косинуса. Гиперболический синус — нечетная, а косинус — четная функции. Гиперболическим аналогом основного тригонометричесмкого тождества является

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \tag{5.5}$$

Гиперболические функции связаны с гиперболой и гиперболическим поворотом также как обычные с окружностью и обычным поворотом.

Для того чтобы продемонстрировать эту связь начнем со следующего замечания.

Назовем *гиперболическим сектором* с раствором x фигуру, ограниченную биссектрисой первой четверти, лучом, проходящим через точку X с координатами x, $\frac{1}{x}$, и заключенным между ними куском гиперболы $xy = 1$. Тогда площадь этого сектора равна логарифму x. Действительно, площади прямоугольных треугольников с гипотенузами OX и OA, где A — вершина гиперболы, совпадают и равны $\frac{1}{2}$.

Если теперь наоборот обозначить через x площадь гиперболического сектора, то координаты X будут e^x и e^{-x}. Проекции этой точки на биссектрисы первой и второй четвертей соответственно равны $\frac{e^x+e^{-x}}{\sqrt{2}}$ и $\frac{e^x-e^{-x}}{\sqrt{2}}$ Поэтому если перейти в систему координат $x_1 = (x+y)/\sqrt{2}$ $x_1 = (x-y)/\sqrt{2}$, то уравнение гиперболы примет вид $x^2-y^2 = 2$. Если теперь сжать все в $\sqrt{2}$ раз, то уравнение гиперболы примет канонический вид $x^2-y^2 = 1$ площадь сектора станет $\frac{x}{2}$.

6 Бином Ньютона

Бином Ньютона. Для целых неотрицательных $k \leq n$ через C_n^k обозначается коэффициент при x^k у многочлена, возникающего из возведения двучлена (бинома) $1+x$ в степень n. Таким образом по определению *биномиальных коэффициентов* (именно так называются числа C_n^k) имеет место равенство:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k. \tag{6.1}$$

Если в этой формуле умножить обе части равенства на $(1+x)$, то в левой части мы получим $(1+x)^{n+1}$, а в правой — сумму $C_n^0 + \sum\limits_{k=1}^{n}(C_n^k + C_n^{k-1})x^k + C_n^n x^{n+1}$.

Откуда немедленно следует такое правило сложения биномиальных коэффициентов

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k \tag{6.2}$$

Кроме того оттуда вытекают такие равенства для крайних коэффициентов

$$C_n^0 = C_{n+1}^0 \qquad C_n^n = C_{n+1}^{n+1} \tag{6.3}$$

Лемма 6.1. *Правило сложения* (6.2) *и равенства крайних коэффициентов* (6.3) *определяют единственную двойную последовательность, для которой* $C_0^0 = 1$.

Доказательство. Во-первых заметим, что из равенств (6.3) немедленно получается, что $C_n^0 = C_n^n = 1$ при любом натуральном n.

Далее построение двойной последовательности C_n^k производится с помощью пары вложенных циклов. Внешний по n (от единицы), внутренний по k (от единицы до n). Внутренний цикл определяет C_{n+1}^k исходя из уже известных C_n^k и C_n^{k-1} по правилу сложения (6.2). □

И. Ньютоном, была получена следующая формула для биномиальных коэффициентов:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{6.4}$$

Доказательство этой формулы немедленно получается из (6.1) ввиду тождества

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \tag{6.5}$$

Так как $(a+b)^n = a^n(1+\frac{b}{a})^n$, то из полученных результатов получается следующая знаменитая формула, известная под именем *бином Ньютона*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k} \tag{6.6}$$

7 Экспоненциальный ряд

Экспоненциальный ряд. Основание натуральных логарифмов, то есть число, натуральный логарифм которого равен единице, играет в математике большую роль. Со времен Эйлера оно обозначается буквой e и приблизительно равняется $2.718281828\ldots$.

Так как $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1$, а $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > 1$, то e удовлетворяет при любом n неравенствам

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \tag{7.1}$$

Эйлер в своем "Введении в анализ бесконечно-малых"приводит такое рассуждение, позволяющее получить разложение показательной функции e^x в степенной ряд.

Поскольку из неравенств (7.1) вытекает, что $e = \left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}$, где ω обозначает бесконечно большое число, постольку

$$e^x = \left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{x\omega} = \left(1+\frac{x}{x\omega}\right)^{x\omega} = \left(1+\frac{x}{\omega}\right)^{\omega}.$$

Рассмотрим биномиальное разложение

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+x+\frac{n(n-1)x^2}{2!n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!n^3}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)x^4}{4!n^4}+\ldots \tag{7.2}$$

Поскольку при бесконечно большом $n = \omega$ (k фиксировано) отношение $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{n^k}$ превращается в единицу, постольку правая часть приведенной выше формулы трансформируется в *экспоненциальный ряд*

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots \tag{7.3}$$

Если определить функцию $\exp x$ посредством указанного экспоненциального ряда, то на основе доказанной ниже теоремы сложения, нетрудно доказать ее совпадение с функцией e^x, где $e = \exp 1$.

Теорема Коши об умножении рядов *Сверткой* или *произведением Коши* рядов $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ называется ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, где $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

Теорема 1. *Если абсолютно сходятся ряды* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$, *то абсолютно сходится их свертка и имеет место равенство*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

Доказательство. Массив $\{a_k b_j\}_{k,j=0}^{\infty}$ абсолютно суммируем, потому что имеем безусловные равенства

$$\sum_{j,k=0}^{\infty} |a_k||b_j| = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} |a_k||b_j| = \sum_{k=0}^{\infty}\left(|a_k|\sum_{j=0}^{\infty}|b_j|\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}|b_j|\right), \tag{7.4}$$

поэтому абсолютная суммируемость двойного ряда вытекает из условий теоремы. Теперь абсолютная суммируемость двойного ряда позволяет повторить выкладки (7.4) уже без модулей. $\square$

Теорема 2 (сложения). *Для любых вещественных x, y справедливо равенство* $\exp(x+y) = \exp x \exp y$

Доказательство. В силу теоремы Коши произведение рядов $\exp x \exp y$ представляется рядом $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$, где $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!}$. А n-ый член ряда, представляющего $\exp(x+y)$ равен $\frac{(x+y)^n}{n!}$. Последнее выражение, будучи разложено по формуле бинома Ньютона, как раз дает c_n. $\square$

Обратность экспоненты и логарифма.

Теорема 3. *Для любого числа x выполнено равенство* $\log \exp x = x$

Доказательство. Доказательство этой теоремы основано на следующих двух элементарных парах неравенств об экспоненте и логарифме называемых нами *базовыми оценками* для экспоненты и логарифма.

$$1 + x \leq \exp x \leq \frac{1}{1-x} \qquad \frac{x}{1+x} \leq \log(1+x) \leq x$$

Эти неравенства справедливы для положительных x меньших единицы. Требуемое тождество, очевидно, достаточно доказать для положительных x ибо функция $\log \exp(x)$ нечетна ($\log \exp -x = \log \frac{1}{\exp x} = -\log \exp x$) как и функция x. Итак, в дальнейшем считаем x положительным. Рассмотрим натуральное n большее чем x. Тогда $x/n < 1$ и пользуясь верхней базовой оценкой для экспоненты получаем $\exp x/n \leq \frac{1}{1-x/n}$. И применяя к обоим частям логарифм имеем:

$$\log(\exp(x/n) \leq \log \frac{1}{1-x/n} = \log\left(1 + \frac{x/n}{1-x/n}\right) \leq \frac{x/n}{1-x/n}$$

где последний переход использует верхнюю базовую оценку для логарифма. Умножая на n эти неравенства слева, мы получаем $n \log \exp(x/n) = \log(\exp(x/n)^n) = \log \exp x$, а справа число $\dfrac{x}{1-x/n}$, которое при увеличении n становиться сколь угодно мало превосходящим x. А именно, для любого положительного ε нам нужно указать такое n, для которого справедливо неравенство $\frac{x}{1-x/n} \leq x + \varepsilon$. Поделив обе части на x, получим эквивалентное неравенство

$$\frac{1}{1-x/n} \leq 1 + \frac{\varepsilon}{x}$$

Но поскольку $\frac{1}{1-x/n} \leq 1 + x/n$ постольку справедливость последнего обеспечивается неравенством $\frac{x}{n} \leq \frac{\varepsilon}{x}$, которое в свою очередь выполняется при n больших чем $\frac{x^2}{\varepsilon}$.

Откуда получаем неравенство $\log \exp x \leq x$.

Обратное неравенство доказывается аналогично. Начнем с неравенства $1 + x/n \leq \exp x/n$ (нижняя оценка для экспоненты) Применим к обеим частям логарифм и пользуясь нижней базовой оценкой логарифма

$$\frac{x/n}{1+x/n} \leq \log(1+x/n) \leq \log\exp x/n$$

Умножаем эти неравенства на n справа, как и выше получаем $\log\exp x$, а слева число $\dfrac{x}{1+x/n}$, которое меньше чем x на величину становящуюся с ростом n сколь угодно малой. (читателю рекомендуется самостоятельно провести вычисления выражающие n через ε в этом случае). Поэтому заключаем $\log\exp x \geq x$. $\square$

8 Комплексные числа.

Кубическое уравнение Подстановка $x = y - \frac{a}{3}$ сводит общее кубическое уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ к

$$y^3 + py + q = 0.$$

Редуцированное уравнение решается с помощью следующего трюка. Корень ищется в форме $y = \alpha + \beta$. Тогда $(\alpha + \beta)^3 + p(\alpha + \beta) + q = 0$ или $\alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta) + p(\alpha + \beta) + q = 0$. Последнее равенство сводится к системе

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \beta^3 &= -q, \\ 3\alpha\beta &= -p. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Возведение второго уравнения в куб дает

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \beta^3 &= -q, \\ 27\alpha^3\beta^3 &= -p^3. \end{aligned}$$

Теперь α^3, β^3 являются корнями квадратного уравнения

$$x^2 + qx - \tfrac{p^3}{27},$$

называемого *резольвентой* исходного кубического уравнения. Иногда резольвента не имеет решений, хотя кубическое уравнение всегда имеет корень. Несмотря на это можно вычислить корень кубического уравнения с помощью его резольвенты. Чтобы это сделать надо просто игнорировать тот факт, что под корнем могут оказаться отрицательные числа.

Например рассмотрим следующее кубическое уравнение

$$x^3 - \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{2} = 0. \tag{8.2}$$

Тогда (8.1) превращается в

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \beta^3 &= \tfrac{1}{2}, \\ \alpha^3\beta^3 &= \tfrac{1}{8}, \end{aligned}$$

Соответствующая резольвента будет $t^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{8} = 0$ и ее корни таковы:

$$t_{1,2} = \tfrac{1}{4} \pm \sqrt{\tfrac{1}{16} - \tfrac{1}{8}} = \tfrac{1}{4} \pm \tfrac{1}{4}\sqrt{-1}.$$

Тогда искомый корень кубического уравнения задается формулой

$$\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}(1 + \sqrt{-1})} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{4}(1 - \sqrt{-1})} = \tfrac{1}{\sqrt[3]{4}}\left(\sqrt[3]{1+i} + \sqrt[3]{1-i}\right). \tag{8.3}$$

Оказывается, что последнее выражение естественным образом интерпретируется как вещественное число (8.2). Чтобы его определить, рассмотрим следующее выражение:

$$\sqrt[3]{(1+i)^2} - \sqrt[3]{(1+i)}\sqrt[3]{(1-i)} + \sqrt[3]{(1-i)^2}. \tag{8.4}$$

Так как
$$(1+i)^2 = 1^2 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i,$$
левое слагаемое в (8.4) равняется
$$\sqrt[3]{2i} = \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{2}\sqrt{\sqrt[3]{-1}} = \sqrt[3]{2}\, i.$$
Аналогично $(1-i)^2 = -2i$, и правое слагаемое в (8.4) превращается в $-\sqrt[3]{2}\, i$. Наконец $(1+i)(1-i) = 1^2 - i^2 = 2$ и центральное слагаемое есть $-\sqrt[3]{2}$. В результате все выражение (8.4) оказывается равным $-\sqrt[3]{2}$.

С другой стороны вычисление произведения (8.3) и (8.4) по обычной формуле как суммы кубов дает
$$\tfrac{1}{\sqrt[3]{4}}((1+\sqrt{-1})+(1-\sqrt{-1})) = \tfrac{1}{\sqrt[3]{4}}((1+1)+(\sqrt{-1})-\sqrt{-1})) = \tfrac{1}{\sqrt[3]{4}}(2+0) = \sqrt[3]{2}.$$
Следовательно (8.3) равно $\frac{\sqrt[3]{2}}{-\sqrt[3]{2}} = -1$. И -1 действительно, является корнем уравнения (8.2).

Арифметика комплексных чисел

В дальнейшем мы используем i вместо $\sqrt{-1}$. Есть два основных способа записи комплексных чисел. Запись вида $z = a + ib$, где a и b являются вещественными числами мы называем *аддитивной формой* числа z. Числа a и b называются соответствено *действительной* и *мнимой* частями z и обозначаются $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ соответственно. Сумма и произведение комплексных чисел в аддитивной форме выражаются следующим образом:
$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(z_1 + z_2) &= \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2,\\
\operatorname{Im}(z_1 + z_2) &= \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2,\\
\operatorname{Re}(z_1 z_2) &= \operatorname{Re} z_1 \operatorname{Re} z_2 - \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2,\\
\operatorname{Im}(z_1 z_2) &= \operatorname{Re} z_1 \operatorname{Im} z_2 + \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Re} z_2.
\end{aligned}$$

Тригонометрической формой комплексного числа называется представление $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $\rho \geq 0$ и φ — вещественные числа, из которых первое называется *модулем* или *абсолютной величиной* комплексного числа z и обозначается $|z|$, а φ называется *аргументом*.

Аргумент комплексного числа определен неоднозначно. Однозначно определен лишь его остаток от целочисленного деления на 2π. Через $\operatorname{Arg}(z)$ обозначается множество всех аргументов z, и через $\arg z$ обозначается элемент множества $\operatorname{Arg} z$, удовлетворяющий неравенствам $-\pi < \arg z \leq \pi$. Таким образом $\arg z$ однозначно определен для всех комплексных чисел и называется *главным аргументом* числа z.

Число $a - bi$ называется *сопряженным* к $z = a + bi$ и обозначается $\overline{z}$. Имеет место тождество $z\overline{z} = |z|^2$. Это позволяет выразить z^{-1} как $\frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Если $z = a + ib$, то $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ и $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$. Комплексные числа можно представлять точками плоскости. Число $z = a + bi$ представляется точкой Z с координатами (a, b). Тогда $|z|$ равно расстоянию от Z до начала координат O. И $\arg z$ представляет угол между осью абсцисс и лучом $\overrightarrow{OZ}$.

Сложению комплексных чисел соответствует обычное сложение векторов. И обычное неравенство треугольника превращается в *модульное неравенство*:

$$|z + \zeta| \le |z| + |\zeta|.$$

Формула умножения для комплексных чисел в тригонометрической форме особенно проста:

$$\begin{aligned} r(\cos\varphi + i\sin\varphi)r'(\cos\psi + i\sin\psi) \\ = rr'(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)). \end{aligned} \tag{8.5}$$

Действительно, левая и правая части (8.5) преобразуются к

$$rr'(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + irr'(\sin\varphi\cos\psi + \sin\psi\cos\varphi).$$

То есть, модуль произведения равен произведению модулей и аргумент произведения равен сумме аргументов:

$$\operatorname{Arg} z_1 z_2 = \operatorname{Arg} z_1 \oplus \operatorname{Arg} z_2.$$

Формула умножения позволяет по индукции доказать следующее:

(Формула Муавра) $$\boxed{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi).}$$

9 Формула Эйлера

Сумма ряда комплексных чисел

Нашей целью теперь является распространение теории суммирования на ряды комплексных чисел. Мы распространим всю теорию без всяких потерь на так называемые *абсолютно сходящиеся* ряды. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ любых комплексных чисел называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |z_k|$ его абсолютных величин.

Для абсолютно сходящегося комплексного ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ мы определим вещественную и мнимую части всей суммы раздельно формулами

$$\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_k \qquad \operatorname{Im}\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_k \tag{9.1}$$

ряды в правой части этих формул абсолютно сходятся, так как $|\operatorname{Re} z_k| \leq |z_k|$ и $|\operatorname{Im} z_k| \leq |z_k|$.

Теорема 1. *Для любой пары абсолютно сходящихся рядов* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *их почленная сумма* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ *абсолютно сходится и имеет место равенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k. \tag{9.2}$$

Доказательство. Во-первых заметим, что абсолютная сходимость рядов в левой части вытекает из модульного неравенства $|a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k|$ и абсолютной сходимости рядов в правой части.

Равенство (9.2) расщепляется на пару равенств, одно для вещественной, другое — для мнимой частей. Так как для вещественных рядов почленное сложение уже доказано, мы можем написать следующую цепь равенств:

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\right) = \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty} a_k + \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Re} a_k + \sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Re} b_k =$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}(\operatorname{Re} a_k + \operatorname{Re} b_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Re}(a_k + b_k) = \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k),$$

которая доказывает равенство вещественных частей в (9.2). То же доказательство проходит и для мнимых частей. □

Теорема 2 (Почленное умножение). *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |z_k|$ *абсолютно сходится, то для любого комплексного* c *абсолютно сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |cz_k|$ *и имеет место равенство* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} cz_k = c\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$.

Доказательство. Правило почленного умножения для положительных чисел дает доказательство первого утверждения теоремы $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|cz_k| = \sum\limits_{k=1}^{\infty}|c||z_k| = |c|\sum\limits_{k=1}^{\infty}|z_k|$. Дальнейшее доказательство разбивается на три случая.

Первый случай. c вещественно, z_k комплексны.

В этом случае $\operatorname{Re} cz_k = c\operatorname{Re} z_k$. Следовательно,

$$\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty} cz_k = \sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Re} cz_k = \sum_{k=1}^{\infty} c\operatorname{Re} z_k = c\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Re} z_k = c\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \operatorname{Re} c\sum_{k=1}^{\infty} z_k$$

Тоже самое верно и для мнимых частей.

Второй случай. $c = i$ и z_k комплексны.

Тогда $\operatorname{Re} iz_k = -\operatorname{Im} z_k$ и $\operatorname{Im} iz_k = \operatorname{Re} z_k$. Поэтому для вещественных частей будет

$$\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty} iz_k = \sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Re}(iz_k) = \sum_{k=1}^{\infty} -\operatorname{Im} z_k =$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Im} z_k = -\operatorname{Im}\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \operatorname{Re} i\sum_{k=1}^{\infty} z_k$$

Общий случай. $c = a + bi$ с вещественными a, b.

Тогда

$$c\sum_{k=1}^{\infty} z_k = a\sum_{k=1}^{\infty} z_k + ib\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} az_k + \sum_{k=1}^{\infty} ibz_k = \sum_{k=1}^{\infty}(az_k + ibz_k) = \sum_{k=1}^{\infty} cz_k$$

□

Модульное неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} z_k\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}|z_k| \tag{9.3}$$

Доказательство. Для вещественных чисел x_k модульное неравенство получается в результате суммирования неравенств $-|x_k| \le x_k \le |x_k|$, которое дает $-\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k| \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k \le \sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|$, что и доказывает модульное неравенство для вещественных чисел $\left|\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k\right| \le \sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|$. Если z_k комплексны, но имеют вещественную сумму, то модульное неравенство в этом случае выводится из неравенства для вещественных чисел ввиду равенств:

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Re} z_k$$

В общем случае рассмотрим $\alpha = \left|\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\right| / \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Тогда $|\alpha| = 1$ и $\left|\alpha\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k\right| = \left|\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k\right|$ поэтому модульное неравенство для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ следует из модульного неравенства для $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha z_k$, которое справедливо, так как сумма последнего вещественна. □

Комплексная геометрическая прогрессия

Сумма геометрической прогрессии с комплексным знаменателем дается обычной формулой

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^n}{1-z}. \tag{9.4}$$

И доказательство этого факта такое же как в случае вещественных чисел. Но значение этой формулы другое. Любая комплексная формула фактически представляет собой пару формул. Любое комплексное уравнение фактически представляет пару уравнений.

В частности, для $z = q(\sin\varphi + i\cos\varphi)$ вещественная часть левой стороны в (9.4) благодаря формуле Муавра превращается в $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k \sin k\varphi$ и правая часть превращается в $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k \cos k\varphi$. Таким образом формула геометрической прогрессии распадается в пару формул, позволяющих телескопировать тригонометрические ряды.

Комплексификация рядов Комплексные числа эффективно применяются для суммирования *тригонометрических рядов*, т.е. рядов типа $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \sin kx$. Например, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k \sin k\varphi$ дополняется двойственным $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k \cos k\varphi$, чтобы образовать комплексный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k(\cos k\varphi + i \sin k\varphi)$. Последний представляет собой комплексную геометрическую прогрессию. Его сумма равна $\frac{1}{1-z}$, где $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Теперь сумма ряда синусов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k \sin k\varphi$ равна $\operatorname{Im} \frac{1}{1-z}$, мнимой части комплексного ряда, и вещественная часть комплексного ряда совпадает с суммой ряда косинусов.

В частности, для $q = 1$, имеем $\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1+\cos\varphi+i\sin\varphi}$. Чтобы вычислить вещественную и мнимую части умножим и числитель и знаменатель на $1+\cos\varphi - i\sin\varphi$. В результате получаем $(1-\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi = 1 - 2\cos^2\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 2 - 2\cos\varphi$ как знаменатель. Следовательно $\frac{1}{1-z} = \frac{1-\cos\varphi+i\sin\varphi}{2-2\cos\varphi} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$. и мы получили две замечательные формулы для сумм расходящихся рядов.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \cos k\varphi = \frac{1}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}.$$

Экспоненциальный ряд. Функция экспонента определяется для комплексного пнременного той же формулой, что и для вещественного

$$e^z = \exp z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}. \tag{9.5}$$

Экспоненциальный ряд абсолютно сходится при любом z и определяет однозначную функцию на всей комплексной плоскости.

Именем Эйлера называется не один десяток математических формул, но самой замечательной и самой важной является следующая

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi} \tag{9.6}$$

Подстановка в (9.5) $z = i\varphi$ для вещественного φ дает степенной ряд, вещественная часть которого, согласно формуле Эйлера представляет $\cos\varphi$, а мнимая часть — $\sin\varphi$. И комплексная формула (9.6), таким образом эквивалентна паре вещественных

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos z = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Вывод Эйлера. Формула Муавра позволяет при любом натуральном n написать равенство

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = \left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)^n$$

Раскрывая степень справа по биному Ньютона, получаем выражение

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \cos^{n-k}\frac{\varphi}{n} i^k \sin^k\frac{\varphi}{n} \tag{9.7}$$

Далее Эйлер подставляет в это выражение $n = \infty$ и пользуется тем, что бесконечно малая дуга равна своему синусу и имеет косинусом единицу. В результате выражение (9.7) при бесконечно большом n имеет то же значение, как и следующее

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \frac{\varphi^k i^k}{n^k} \tag{9.8}$$

А так как при бесконечно большом n будет $\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = 1$, то последнее выражение при бесконечно большом n превращается в

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^k}{k!}$$

Тригонометрические функции комплексного переменного В силу формулы Эйлера экспонента комплексного переменного выражается через элементарные функции действительного переменного

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) \tag{9.9}$$

Теорема умножения

$$\exp z \exp w = \exp(z+w)$$

также немедленно вытекает из формулы (9.9).

С другой стороны Формула Эйлера позволяет выразить через экспоненту все тригонометрические функции и определить их как функции комплексной переменной

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \operatorname{tg} z = -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} \tag{9.10}$$

Абсолютно суммируемые массивы. Сумма неупорядоченного массива комплексных чисел $\sum_{j\in J} z_j$ определяется в случае $\sum_{j\in J} |z_j| < \infty$ (условие абсолютной суммируемости) теми же формулами, что и для рядов

$$\operatorname{Re}\sum_{j\in J} z_j = \sum_{j\in J} \operatorname{Re} z_j \qquad \operatorname{Im}\sum_{j\in J} z_j = \sum_{j\in J} \operatorname{Im} z_j \tag{9.11}$$

И точно также, как это было сделано ранее для рядов, доказываются теоремы о почленном сложении и умножении неупорядоченных сумм.

$$\sum_{j\in J} a_j + \sum_{j\in J} b_j = \sum_{j\in J} (a_j + b_j) \qquad c\sum_{j\in J} z_j = \sum_{j\in J} cz_j \tag{9.12}$$

Так как для вещественных рядов неупорядоченная сумма совпадает с упорядоченной мы получаем те же самые совпадения для абсолютно сходящихся комплексных рядов. В частности закон коммутативности справедлив для абсолютно сходящихся комплексных рядов.

Теорема 3 (об объединении сумм). *Если Пусть $I = \cup_{j\in J} I_j$, и множества I_j при различных j попарно не пересекаются. Тогда если $\sum_{i\in I} |a_i| < \infty$, то $\sum_{j\in J} \left|\sum_{i\in I_j} a_i\right| < \infty$ и*

$$\sum_{j\in J} \sum_{i\in I_j} a_i = \sum_{i\in I} a_i \tag{9.13}$$

Доказательство. Теорема немедленно вытекает из соответствующей теоремы для вещественных рядов посредством расщепления комплексных на вещественную и мнимую части. $\square$

10 Квадратура парабол

Вычисление площади под параболой явилось одним из наиболее замечательных результатов Архимеда и всей античной математики. Для того чтобы вычислить площадь между частью параболы $y = x^2$ и отрезком $[0, a]$ — вертикальной проекцией этой части на ось абсцисс Архимед делил проекцию на n равных частей, для каждой части вида $[\frac{k-1}{n}a, \frac{k}{n}a]$ строил на ней как на основании вертикальный прямоугольник высоты $\frac{(k-1)^2}{n^2}a^2$. Тогда суммы площадей построенных прямоугольников равнялась $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(k-1)^2}{n^2}\frac{a^3}{n} = \frac{a^3}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n}(k-1)^2$. При увеличении n эта сумма стремилась площади под параболой и задача сводилась таким образом к нахождению значения следующего выражения для бесконечно большого n

$$\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 \tag{10.1}$$

Архимед нашел известную формулу для суммы квадратов, что позволило ему вычислить это значение, которое оказался равным $\frac{1}{3}$. Метод Архимеда позволяет свести задачу нахождения площади под параболой любой степени m к вычислению значения выражения 10.2 для бесконечно большого n

$$\frac{1}{n^{m+1}}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^m \tag{10.2}$$

Развитая нами теория суммирования позволяет явно вычислять суммы такого рода. При этом для бесконечно больших значений вычисления даже облегчаются

Лемма 10.1. *Для любого натурального m и бесконечно большого n имеет место равенство*

$$\frac{1}{n^{m+1}}\sum_{k=1}^{n}k^m = \frac{1}{m+1}$$

Доказательство. Разность $x^m - x^{\underline{m}}$ является многочленом степени $< m$. Поэтому $x^m = x^{\underline{m}} + \sum\limits_{k=1}^{m} a_k x^{\underline{k}}$, где значения a_k, как мы увидим, не влияют на ответ. Таким образом x^m является разностью следующего выражения

$$\frac{x^{\underline{m+1}}}{m+1} + \sum_{k=1}^{m} a_k \frac{x^{\underline{k+1}}}{k+1} \tag{10.3}$$

Поэтому формула для суммы m-ых степеней имеет вид

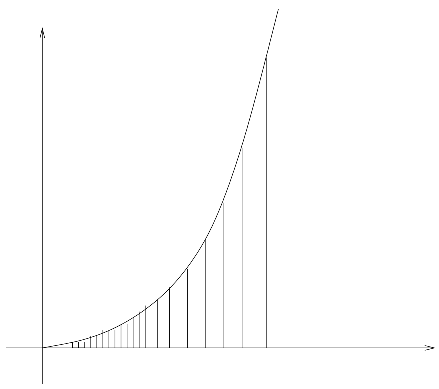
$$\sum_{k=1}^{n}k^m = \frac{n^{\underline{m+1}}}{m+1} + \sum_{k=1}^{m} a_k \frac{n^{\underline{k+1}}}{k+1} \tag{10.4}$$

Если получившееся выражение поделить на n^{m+1}, то первое слагаемое для бесконечно большого n даст $\frac{1}{m+1}$, потому что, для бесконечно большого n, как нам известно, $\frac{n^{\underline{m}}}{n^m} = 1$, а остальные слагаемые бесконечно малы. □

В результате мы получаем

Теорема 1 (Ферма, Кавальери). *Для любого натурального m площадь между отрезком $[0, a]$ и параболой x^m равна $\frac{a^{m+1}}{m+1}$.*

Метод Ферма. В 1636 году Пьер Ферма придумал замечательный способ вычисления площадей под кривыми вида $y = x^a$ подходящий для любых вещественных (в т.ч. дробных, отрицательных и иррациональных).



Если $a > -1$ рассмотрим интервал вида $[0, B]$. Возьмем положительное $q < 1$. Тогда бесконечная геометрическая прогрессия $B, Bq, Bq^2, Bq^3 \ldots$ стремится к нулю и значения функции на этой последовательности также образуют геометрическую прогрессию $B^a, q^a B^a, q^{2a} B^a, q^{3a} B^a, \ldots$. Площади вписанных и описанных в кривую прямоугольников с основаниями Bq^{k+1}, Bq^k (см. рисунок) также представляют собой геометрическую прогрессию. Поэтому суммы площадей последовательности вписанных и описанных прямоугольников нетрудно посчитать:

$$\sum_{k=0}^{\infty} B^a q^{ka}(q^k B - q^{k+1}B) = B^{a+1}(1-q)\sum_{k=0}^{\infty} q^{k(a+1)} = \frac{B^{a+1}(1-q)}{1-q^{a+1}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} B^a q^{(k+1)a}(q^k B - q^{k+1}B) = B^{a+1}(1-q)\sum_{k=0}^{\infty} q^{(k+1)(a+1)} = \frac{B^{a+1}(1-q)q^a}{1-q^{a+1}}.$$

Для натурального a имеем $\frac{1-q}{1-q^{a+1}} = \frac{1}{1+q+q^2+\ldots q^a}$. Так как q стремится к 1 то обе суммы стремятся к $\frac{B^{a+1}}{a+1}$. Это и есть площадь под параболой.

Квадратура многочленов. Ферма сумел также решить вопрос о нахождении площади под графиком для любого многочлена $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n$. Ответ на этот вопрос оказался следующим: площадь под графиком многочлена над отрезком $[0, B]$ выражается следующей формулой:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{B^{k+1}}{k+1} \qquad (10.5)$$

В случае, если многочлен принимает на рассматриваемом промежутке отрицательные значения, то данная формула дает отрицательное число, по абсолютной величине равное площади заключенной между этим промежутком оси абсцисс и расположенным ниже графиком функции. Если же многочлен на рассматриваемом отрезке $[0, B]$ несколько раз меняет знак, то формула (10.5) дает разность между площадью, заключенной между графиком многочлена и осью абсцисс, там где многочлен положителен и площадью, заключенной между осью абсцисс и графиком многочлена там, где последний отрицателен.

Ряд Меркатора. При положительном x геометрический ряд $1-x+x^2-x^3+\dots$ имеет частичные суммы вида $\frac{1-(-1)^n x^n}{1+x}$, которые поочередно то превышают (при четном n), то уступают его полной сумме, то есть при любом $x>0$ имеют место неравенства

$$(10.6)\quad 1-x+x^2-x^3+\dots-x^{2n-1} \le \frac{1}{1+x} \le 1-x+x^2-x^3+\dots+x^{2n}$$

Рассмотрим теперь промежуток $[0, A]$. Кривая $y = \frac{1}{1+x}$ является сдвинутой на единицу влево гиперболой $y = \frac{1}{x}$. Поэтому площадь под ней над отрезком $[0, A]$ равна $\ln(1+A)$. Многочлен из левой части (10.6) имеет площадь под графиком равную $\sum\limits_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$, а многочлен в правой части равную $\sum\limits_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$. Так как график первого лежит ниже гиперболы, а график второго выше, то в результате получаем такие неравенства:

$$(10.7)\quad A-\frac{A^2}{2}+\frac{A^3}{3}-\dots-\frac{A^{2n}}{2n} \le \ln(1+A) \le A-\frac{A^2}{2}+\frac{A^3}{3}-\dots+\frac{A^{2n+1}}{2n+1}$$

Таким образом *ряд Меркатора* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$ является *обертывающим*[1], для логарифма. Из неравенств (10.7) вытекает, что разность между суммой первых n-членов ряда Меркатора и $\ln(1+x)$ по абсолютной величине не превосходит $(n+1)$-го члена (первого отброшенного) и имеет такой же знак как этот член. В частности, при $x<1$ частичные суммы ряда Меркатора имеют своим пределом этот логарифм. Таким образом доказано следующая теорема.

Теорема 2 (Mercator,1668). *Для любого $x \in (0,1)$ справедливо равенство*

$$(10.8)\qquad \boxed{\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}}$$

Вычисления логарифмов Результат Меркатора вызвал революцию, резко сократив количество труда необходимого для вычисления логарифмов. Но ряд Меркатора сходится медленно, поэтому на практике существенно

[1] Числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется обертывающим для числа A, если его частичные суммы поочередно, то превосходят, то уступают A

более употребим следующий *Ряд Грегори*, получаемый как среднее арифметическое рядов Меркатора для x и $-x$:

$$\boxed{\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots.} \tag{10.9}$$

Ряд Грегори сходится существенно быстрее ряда Меркатора. Полагая $x = \frac{1}{3}$ в (10.9) получаем

$$\ln 2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3\cdot 3^3} + \frac{2}{5\cdot 3^5} + \frac{2}{7\cdot 3^7} + \dots.$$

Натуральный логарифм двух вычисляется с помощью ряда Грегори. Имея вычисленным логарифм двух, вычислять логарифм трех можно уже по разному. Например, с помощью ряда Грегори, опираясь на формулу

$$\ln 3 = \ln 2 + \ln\frac{3}{2} = \ln 2 + \ln\frac{1+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}.$$

Другая возможность возникает из

$$\ln 3 = 2\ln 2 - \ln\frac{1+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7}}$$

Еще лучше использовать среднее геометрическое вышеприведенных выражений $3 = \sqrt{\frac{9}{8}}\sqrt{8}$ это дает

$$\ln 3 = \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{1}{17}}{1-\frac{1}{17}}$$

Задачи.

1. Суммировать ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$
2. Суммировать ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+1)!}{(k!)^2}x^k$
3. Придумать эффективный способ вычисления $\ln 5$ и $\ln 7$, если $\ln 2$ и $\ln 3$ считаются известными.
4. Вычислить площадь под кривой $y = 2^x$ над отрезком $[0,1]$
5. Вычислить площадь под кривой $y = \ln x$ над отрезком $[1,2]$
6. Вычислить площадь под кривой $y = \sin x$ над отрезком $[0,\pi]$
7. Доказать справедливость разложения Меркатора для отрицательных x.

11 Степенные ряды.

Теорема единственности. Доказательство Эйлера. "Здесь может возникнуть такое сомнение. Если два ряда между собой равны

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \dots = A' + B'z + C'z^2 + D'z^3 + \dots,$$

то следует ли отсюда неизбежно равенство между собой коэффициентов одинаковых степеней z ; т. е. Будет ли $A = A', B = B', C = C', \dots$. Это сомнение легко устранится, если мы примем во внимание, что это равенство должно существовать, какое бы значение ни получило переменное z. Если $z = 0$, то ясно, что $A = A'$. Отняв от обеих частей эти равные члены и разделив оставшееся уравнение на z, получим

$$B + Cz + Dz^2 + \dots = B'z + C'z + D'z^2 + \dots,$$

откуда следует $B = B'$; подобным же образом покажем, что $C = C'$ и т.д. до бесконечности."

Для доказательства равенства $A_0 = B_0$ нельзя подставлять ноль, нужно обойтись равенством рядов в проколотой окрестности нуля.

Теперь мы в состоянии дать строгое доказательство теоремы единственности. Чтобы продемонстрировать слабость доказательства Эйлера рассмотрим следующий степенной ряд: $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k k! x^k$. Какую функцию он представляет? Этот ряд расходится при любом $x \neq 0$. А при $x = 0$ имеет значение единица. Если считать, что он представляет функцию тождественно равную единице, то он опровергает теорему единственности. На самом деле этот ряд в некотором смысле представляет функцию

$$f(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\tau}}{1 + x\tau}\, d\tau \tag{11.1}$$

Строгое доказательство теоремы единственности мы дадим лишь для рядов с ненулевым радиусом сходимости.

Круг сходимости степенного ряда. Сумма степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ с положительными коэффициентами монотонно возрастает, при увеличении x, если $x > 0$. Поэтому для любого степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ определяется такое число R, называемое его *радиусом сходимости*, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k||z - z_0|^k < \infty$ при $|z - z_0| < R$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k||z - z_0|^k = \infty$ при $|z - z_0| > R$.

Круг в комплексной плоскости с центром z_0 радиуса R называется *кругом сходимости* этого степенного ряда.

Для z из внутренности круга сходимости степенной ряд абсолютно сходится. За пределами круга сходимости степенной ряд расходится.

Лемма 11.1 (об оценке степенного ряда). *Если $|a_n r^n| < C$ для любого*

n и $|z| < r$, то ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ абсолютно сходится и справедливо неравенство

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_k\right| \leq \frac{C}{r - |z|}$$

Из доказанной леммы вытекает, что если z не принадлежит кругу сходимости, то члены степенного ряда неограниченно возрастают.

Изолированность нуля

Лемма 11.2. *Если степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ имеет ненулевой радиус сходимости, то его сумма ограничена в любом круге меньшего радиуса.*

Доказательство. Пусть R является радиусом сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ и пусть $r < R$. Тогда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k = S(r) < \infty$. Для любого z по модулю не превосходящего r имеем

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k||z^k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k = S(r)$$

□

Лемма 11.3. *Если степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ имеет ненулевой радиус сходимости и хотя бы один отличный от нуля коэффициент, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что сумма этого ряда отлична от нуля в проколотой ε-окрестности нуля.*

Доказательство. Пусть $r > 0$ таково, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k = S(r) < \infty$. Пусть n — номер наименьшего отличного от нуля коэффициента ряда. Тогда

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| r^{k-n} = (S(r) - |a_n|)/r^n < \infty.$$

Теперь искомое ε можно определить так, чтобы $\varepsilon^n (S(r) - |a_n|)/r^n < |a_n|$.

Тогда сумма исходного ряда представляется в виде произведения

$$z^n \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^{k-n},$$

в котором оба множителя отличны от нуля. □

О степенных рядах

Теорема 1 (о суперпозиции степенных рядов). *$R = \sum\limits_{k=0}^{\infty} |b_k| r^k$ меньше радиуса сходимости ряда $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, то композиция $f(g(z))$, где $g(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k$, представляется степенным рядом с радиусом сходимости не меньшим r.*

Доказательство. Набор неотрицательных целых чисел $\{j_1 \dots j_n\}$ мы будем обозначать прописной латинской буквой J и называть n его *длиной* и обозначать $\#J = n$ а $j_1+j_2+\dots+j_n$ его *весом* и обозначать $|J| = j_1+j_2+\dots+j_n$.

Обозначим через $\mathbb{Z}^k$ множество всевозможных наборов неотрицательных целых чисел $\{j_1, j_2, \dots, j_k\}$ длины k и через $\mathbb{Z}^*$ объединение $\cup_{k=1}^{\infty}\mathbb{Z}^k$

Для набора $J = \{j_1 \dots j_k\}$ мы будем обозначать через b_J произведение $b_{j_1}b_{j_2}\dots b_{j_k}$.

По теореме о прямом произведении n-ая степень ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|b_k|r^k$ представляется массивом

$$\sum_{J\in\mathbb{Z}^k} r^{|J|}b_J = R^n \tag{11.2}$$

По теореме об объединении массивов

$$\sum_{J\in\mathbb{Z}^*} |a_{\#J}|r^{|J|}b_J = \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|R^k < \infty. \tag{11.3}$$

Таким образом при $|z| < r$ абсолютно суммируемым является массив

$$\sum_{J\in\mathbb{Z}^\infty} a_{\#J}z^{|J|}b_J, \tag{11.4}$$

суммой которого служит $f(g(z)) - a_0$.

Поэтому после перегуппировки мы можем получить абсолютно сходящийся степенной ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k \sum_{|J|=k} a_{\#J}z^{|J|}b_J$$

представляющий $f(g(z)) - a_0$, коэффициенты которого представляют конечные суммы.

□

Теорема 2. *Для любого комплексного z по модулю меньшего единицы справедливо равенство*

$$\ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}z^k}{k}, \tag{11.5}$$

Доказательство. Эта теорема была доказана для вещественных чисел Меркатором с помощью интегрирования равенства

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$$

Ряд в правой части равенства (11.5) называется поэтому *рядом Меркатора.* Для доказательства обозначим через $m(z)$ функцию представленную рядом Меркатора. Рассмотрим композицию $\exp(m(z))$ так как экспоненциальный ряд имеет бесконечный радиус сходимости, то эта композиция имеет радиус сходимости не меньше единицы (радиуса сходимости ряда Меркатора). Для положительных z нам известно равенство $\exp(m(z)) = 1+z$. Следовательно по теореме единственности мы можем заключить, что степенной ряд, представляющий композицию имеет вид $1+z$ и потому равенство $\exp(m(z)) = 1+z$ выполнено для всех z из круга сходимости ряда Меркатора. Из этого равенства вытекает, что $m(z-1)$ обратна к e^z, то есть совпадает с $\ln z$. Откуда $m(z) = \ln(1+z)$. $\square$

Подставляя в ряд Меркатора $-z$ вместо z и вычитая из (**??**), получаем комплексный ряд Грегори:

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{2k+1} \tag{11.6}$$

В частности для чисто мнимого $z = ix$, имеем $\left|\frac{1+ix}{1-ix}\right| = 1$ и $\arg\frac{1+ix}{1-ix} = 2\operatorname{arctg} x$. Откуда следует такое представление арктангенса степенным рядом:

$$\boxed{\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}} \tag{11.7}$$

Подставляя в полученную формулу $x = \pi/4$ мы получаем следующий замечательный результат Лейбница:

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots} \tag{11.8}$$

Так как $\arg(1+\cos\varphi + i\sin\varphi) = \operatorname{arctg}\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \operatorname{arctg}\operatorname{tg}(\varphi/2) = \frac{\varphi}{2}$, если $|\varphi| < \pi$, то подстановка $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ в ряд Меркатора $\ln(1+\cos\varphi + i\sin\varphi) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\cos k\varphi + i\sin k\varphi}{k}$ дает для мнимых частей следующее важное соотношение:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin k\varphi}{k} = \frac{\varphi}{2} \qquad (|\varphi| < \pi) \tag{11.9}$$

Задачи.

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k\varphi}{k} = -\ln|2\sin\frac{\varphi}{2}|$, $(0 < |\varphi| \le \pi)$
2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\varphi}{k} = \frac{\pi-\varphi}{2}$, $(0 < \varphi < 2\pi)$
3. $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\varphi}{2k+1} = \frac{1}{2}\ln|2\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}|$, $(0 < |\varphi| < \pi)$
4. $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\varphi}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$, $(0 < \varphi < \pi)$

5. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\cos k\varphi}{k} = \ln\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right),\ (-\pi < \varphi < \pi)$

6. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k2^k}$

12 Предел последовательности

Лейбниц определял (положительное) бесконечно-малое число как число меньшее любого положительного, но отличное от нуля. Позднее математики стали вместо рассмотрения бесконечно малых чисел рассматривать (бесконечные) последовательности обычных чисел, называя такую последовательность *бесконечно малой*, если она становится меньше любого положительного числа.

Будем говорить, что последовательность (комплексных) чисел $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет какому либо условию *почти всегда* если это условие выполнено для всех, за возможным исключением конечного числа ее членов. Например, неравенство $\frac{1}{n} < \varepsilon$ почти всегда выполнено для членов последовательности $\frac{1}{n}$ при положительном ε.

Последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *бесконечно малой*, если для любого положительного ε почти всегда выполнено неравенство $|z_n| < \varepsilon$.

Лемма 12.1. *Всякая бесконечно малая последовательность содержит наибольший по абсолютной величине элемент.*

Доказательство. Пусть z_n ненулевой член последовательности. Тогда имеется конечное число членов последовательности по модулю больших $|z_n|$. Из них можно выбрать наибольшее по модулю. Оно будет наибольшим по модулю для всей последовательности. □

Лемма 12.2. *Сумма (почленная) и разность бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — две бесконечно-малые последовательности. Для данного положительного ε почти всегда выполнены неравенства

$$|x_n| < \varepsilon/2 \qquad |y_n| \leq \varepsilon/2$$

Откуда для почти всех n выполнены оба эти неравенства, а отсюда следует неравенство

$$|x_n \pm y_n| \leq |x_n| + |y_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если найдется такое число M, что неравенство $|x_n| < M$ выполняется для всех членов последовательности.

Лемма 12.3. *Произведение ограниченной последовательности на бесконечно-малую является бесконечно-малой последовательностью*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно-малая и $\{y_n\}$ ограниченная константой M последовательность. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Тогда почти всегда выполнено неравенство $|x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$. Но это неравенство влечет $|x_n y_n| < |x_n| M < \varepsilon$, что доказывает бесконечно-малость произведения. □

Бесконечно-большие последовательности Последовательность z_n называется бесконечно-большой, если бесконечно-малой является последовательность обратных величин $\frac{1}{z_n} = 0$.

Следующая теорема представляет арифметику бесконечно-больших последовательностей, аналогичную той, которую мы ранее использовали для символа бесконечность.

Теорема 1. *Если $\{a_n\}$ бесконечно большая последовательность, а b_n ограниченна, то*

- *последовательность $\{a_n + b_n\}$ бесконечно-большая*
- *последовательность $\{a_n b_n\}$ является бесконечно-большой, если ограничена последовательность $\frac{1}{b_n}$*
- *$\{\frac{b_n}{a_n}\}$ бесконечно-малая*

Сумма положительных бесконечно-больших последовательностей, является бесконечно-большой положительной последовательностью.

Предел последовательности. Число Z называется *пределом* последовательности (обозначение $Z = \lim z_n$), а сама последовательность называется *сходящейся* к Z (обозначение $z_n \to Z$), если неравенство

$$|z_n - Z| < \varepsilon$$

выполнено при любом $\varepsilon > 0$ почти всегда. Иными словами, если бесконечно-малой является последовательность разностей $Z - z_n$.

Далеко не любая последовательность имеет предел, например, предела не имеет последовательность $(-1)^n$.

Из данного определения непосредственно вытекает такое утверждение

Лемма 12.4. $\lim z_n = Z$ *в том и только том случае, когда* $z_n = Z + o_n$, *где последовательность* o_n *является бесконечно-малой.*

Теорема 2 (о сумме пределов). *Если* $\lim z_n = Z$ *и* $\lim w_n = W$, *то существует* $\lim(z_n + w_n)$ *и он равен* $Z + W$.

Доказательство. $z_n = Z + \zeta_n$ и $w_n = W + \omega_n$. И теорема вытекает из того что сумма бесконечно-малых бесконечно-малая. □

Теорема 3 (о пределе произведения). *Если* $\lim a_n = A$ *и* $\lim b_n = B$, *то последовательность произведений сходится и имеет пределом* $\lim a_n b_n = AB$.

Доказательство. Так как $a_n = A + \alpha_n$ и $b_n = B + \beta_n$, то $a_n b_n = AB + A\beta_n + B\alpha_n + \alpha_n\beta_n$, где последние три слагаемых бесконечно-малые. □

Теорема 4 (о пределе частного). *Если* $\lim a_n = A$, $\lim b_n = B \neq 0$, *то последовательность частных* $\frac{a_n}{b_n}$ *сходится и* $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.

Доказательство. Пусть $b_n = B + \beta_n$. Тогда

$$\frac{1}{B + \beta_n} - \frac{1}{B} = \frac{1}{B}\left(\frac{1}{1 + \frac{\beta_n}{B}} - 1\right)$$

Выражение справа является бесконечномалой. Следовательно $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{B}$ и наше утверждение следует из теоремы о произведении пределов. □

Пределы и неравенства

Теорема 5 (предельный переход в неравенстве). *Если $a_k \leq b_k$ почти при любом k, то* $\lim a_k \leq \lim b_k$.

Доказательство. Предположим противное, что $A = \lim a_k > B = \lim b_k$. Рассмотрим $C = (A+B)/2$. Тогда $\lim a_n > C$ и потому почти всегда $a_n > C > B$. Но в таком случае почти всегда $b_n > C$. С другой стороны $\lim b_n < C$, поэтому почти всегда $b_n < C$. Противоречие. □

Подпоследовательности Подпоследовательностью последовательности $\{a_n\}_{n \in N}$ называется последовательность вида $\{a_{n_k}\}$, где $\{n_k\}$ — произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел. Важнейшими для нас примерами подпоследовательностей являются четная $\{a_{2k}\}$ и нечетная $\{a_{2k+1}\}$ подпоследовательности. Непосредственно из определения предела вытекает такое правило

Теорема 6 (о наследовании сходимости). *Всякая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу.*

Свойство наследования сходимости широко применяется для нахождения пределов, существование которых известно. Например, для любого числа $a > 1$ последовательность корней ${}^n\sqrt{a}$ имеет предел $\lim {}^n\sqrt{a} = A$, так как монотонно убывает и ограничена снизу нулем. Четная подпоследовательность имеет тот же предел, откуда $A = \lim \sqrt[2n]{a} = \lim \sqrt[n]{a} = \sqrt{\sqrt[n]{a}} = \sqrt{A}$. Откуда $A = 1$. Этот способ нахождения пределов обобщает метод формального суммирования и будет называться также *формальным*.

Задачи.

1. Образец $\lim frac1n$
2. $\lim \sqrt[n]{2}$
3. $\lim \frac{n}{2^n}$
4. $\lim \frac{2^n}{n!}$
5. $\lim \sqrt[n]{n}$
6. Образец Нахождение методом авторекурсии предела $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}$ двумя способами $n \to (n+1)$, $n \to 2n$ и доказательство сходимости через монотонность.
7. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}$ (найти и доказать существование)
8. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$ (найти и доказать существование)
9. Доказать непрерывность корня $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$
10. $a_0 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ (найти и доказать существование) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$
11. $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$, $x_1 = 1$ (найти и доказать существование) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

13 Первый замечательный предел

Для доказательства существования пределов часто используется следующая теорема Больцано-Вейерштрасса.

Теорема 1 (о пределе монотонной последовательности). *Всякая монотонная ограниченная последовательность сходится к своей верхней (если она неубывает) или нижней (если невозрастает) грани.*

Доказательство. Пусть x_n — монотонная неубывающая последовательность. Если она ограничена сверху, то обозначим через X ее точную верхнюю грань, то есть наименьшее ограничивающее ее сверху число. Тогда при любом n имеем неравенства $X \geq x_n$. И для любого положительного ε число $X - \varepsilon$ уже не ограничивает сверху последовательность x_n. Поэтому некоторый член последовательности, а значит и все ее последующие члены будут больше чем $X - \varepsilon$. Значит почти для всех членов последовательности имеем $x_n > X - \varepsilon$. В итоге для почти всех x_n имеем

$$\varepsilon \geq X - x_n - X \geq 0.$$

Откуда $|X - x_n| < \varepsilon$ почти всегда. То есть $\lim x_n = X$. □

Доказательство. Рассмотрим случай неубывающей последовательности. Для числа x обозначим через $x[k]$ его k-ую после запятой цифру десятичной записи (цифры до запятой обозначаются отрицательными k). Тогда последовательность $x_n[k]$ при фиксированном k стабилизируется, то есть становится постоянной, начиная с некоторого номера. Действительно, ведь каждое изменение этой последовательности означает увеличение целой части числа $10^k x_n$ как минимум на единицу. Но эта последовательность ограничена. Следовательно, для любого k существует номер $N(k)$, начиная с которого $x_n[k]$ не меняется. Обозначим через $X[k]$ это значение, на котором стабилизируется k-ая цифра и обозначим через X число, которое своей k-ой цифрой имеет $X[k]$. Тогда при n большем чем $\max_{j \leq k} N(j)$, у X и x_n совпадают все цифры вплоть до k-ой цифры после запятой, поэтому $|X - x_n| < 10^{-k}$ откуда видно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = X$.

Докажем теперь, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq x_k$. Действительно, неравенство $x_n \geq x_k$ выполнено для всех $n \geq k$, поэтому предельный переход в этом неравенстве дает $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} x_k = x_k$. Любое меньшее, чем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ число уже не ограничивает сверху члены последовательности $\{x_n\}$, потому что для любого положительного ε почти всегда выполнено неравенство $|\lim\limits_{n\to\infty} x_n - x_n| < \varepsilon$, из которого вытекает, что почти всегда $x_n > \lim\limits_{n\to\infty} x_n - \varepsilon$. Следовательно, предел неубывающей последовательности является ее точной верхней гранью.

Аналогично доказывается теорема в случае невозрастающей последовательности. □

О периметрах многоугольников

Лемма 13.1. *Если выпуклый многоугольник P' содержит выпуклый многоугольник P, то периметр P' больше либо равен периметра P*

Доказательство. Проводим индукцию по числу вершин P, не лежащих на границе P'. Если все вершины P лежат на P', то длина каждой его стороны AB не превосходит длины ломаной представляющей часть границы P' заключенной между A и B. И сумма длин этих ломаных, равная периметру P', будет больше либо равна сумме длин сторон P, то есть его периметра.

Пусть утверждение доказано, если число вершин не лежащих на границе P' меньше чем $n > 0$. И пусть теперь это число равно n. Если ни одна из вершин P не лежит на границе P, то мы можем сдвинуть P внутри P' так чтобы одна из вершин P попала на P'. У сдвинутого P периметр тот же, что у исходного а число вершин не лежащих на границе P' меньше чем n. Поэтому по предположению индукции его периметр меньше либо равен периметра P'. Если же имеется хотя бы одна вершина у P, лежащая на границе P', и имеется хотя бы одна не лежащая на ней, то найдется сторона AB у P один из концов которой, скажем A лежит на P', а другой нет. Пусть P'' многоугольник полученный пересечением P' с той полуплоскостью, ограниченной прямой AB которая содержит P. Тогда P'' содержит на своей границе все вершины P, лежавшие на границе P' и дополнительно содержит B. Поэтому по предположению индукции периметр P'' больше либо равен периметра P. А так как P'' вписан в P', то есть все вершины P'' лежат на границе P, то периметр P'' не превосходит периметра P'. Откуда и периметр P не превосходит периметра P'. □

Длина окружности Периметр вписанного в окружность правильного многоугольника с ростом числа сторон возрастает, стремясь к некоторому пределу, называемому длиной окружности. Длина стороны правильного n-угольника, вписанного в единичную окружность равна $2\sin\frac{180^\circ}{n}$ и половина его периметра с ростом n стремится к длине полуокружности, которая является самой важной математической постоянной и обозначается π. Таким образом

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{180^\circ}{n} = \pi \tag{13.1}$$

Таким образом дуга окружности, содержащая 180°, имеет длину π и дуга окружности имеющая x° имеет длину $\frac{x}{180}\pi$, что является формулой перехода от градусной к радианной мере угла. Если аргумент синуса мерить в радианах, то формула (13.2) выражающая аппроксимацию дуги содержащей x радиан периметром вписаной ломаной примет следующий вид

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{x}{n} = x \tag{13.2}$$

При вычислении периметров вписанных n-угольников проще всего использовать удвоение числа сторон, благодаря формуле для синуса двойного угла. К тому же при удвоении особенно очевидно возрастание периметра. Поэтому в этом случае монотоннность последовательности периметров очевидна, а ее ограниченность вытекает из следующего соображения:

Лемма 13.2. *Пусть последовательность точек плоскости $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$ такова, что их действительные и мнимые части образуют монотонные последовательности. Тогда имеют место неравенства*

$$|\operatorname{Re}(z_n - z_0)| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}| \leq |\operatorname{Re}(z_n - z_0)| + |\operatorname{Im}(z_n - z_0)|$$

Доказательство. Действительно, для любого k имеем очевидные неравенства

$$|\operatorname{Re}(z_k - z_{k-1})| \le |z_k - z_{k-1}| \le |\operatorname{Re}(z_k - z_{k-1})| + |\operatorname{Im}(z_k - z_{k-1})|$$

Складывая эти неравенства получаем

$$\sum_{k=1}^{n} |\operatorname{Re}(z_k - z_{k-1})| \le \sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}| \le \sum_{k=1}^{n} |\operatorname{Re}(z_k - z_{k-1})| + \sum_{k=1}^{n} |\operatorname{Im}(z_k - z_{k-1})|$$

Но по условию все величины $\operatorname{Re}(z_k - z_{k-1})$ имеют одинаковые знаки. Поэтому сумма их модулей равна модулю суммы

$$\sum_{k=1}^{n} |\operatorname{Re}(z_k - z_{k-1})| = \left|\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}(z_k - z_{k-1})\right| \qquad \sum_{k=1}^{n} |\operatorname{Im}(z_k - z_{k-1})| = \left|\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Im}(z_k - z_{k-1})\right|$$

А так как

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} z_k - \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} z_{k-1} = \operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z_0 = \operatorname{Re}(z_n - z_0)$$

И аналогичное равенство имеет место для мнимых частей, то это завершает доказательство. □

Любая вписанная в окружность ломаная разбивается на четыре куска монотонности (по четвертям круга) и каждый из четырех кусков имеет длину, не превосходящую 2, в силу доказанной леммы. Поэтому длина любой такой ломаной не превосходит 8 (периметра описанного квадрата). Это показывает ограниченность периметров ломаных и доказывает существование предела для последовательности периметров с удваивающимся числом сторон.

Лемма о милиционерах Следующий часто применяемый при вычислении пределов технический прием называется *леммой о милиционерах.*

Лемма 13.3 (о милиционерах). *Пусть даны три последовательности, любые члены которых удовлетворяют неравенствам $a_n \le b_n \le c_n$. Тогда из сходимости двух крайних последовательностей (милиционеров) к одному и тому же пределу $\lim a_n = \lim c_n = U$ (участку) вытекает сходимость конвоируемой последовательности к тому же пределу $\lim b_n = U$*

Доказательство. Пусть дано положительное ε. Тогда неравенства $|a_n - U| < \varepsilon$ и $|c_n - U| < \varepsilon$ выполнены почти всегда. Значит почти всегда имеем $U - \varepsilon < a_n$ и $c_n < U + \varepsilon$. Откуда почти всегда будет $U - \varepsilon < b_n < U + \varepsilon$. То есть $|U - b_n| < \varepsilon$ почти всегда, что и означает $\lim b_n = U$. □

Первый замечательный предел. Так как длина хорды не превосходит длины соответствующей дуги окружности, то при любом x справедливо неравенство

$$\sin x < x \tag{13.3}$$

Теорема 2 (первый замечательный предел). *Если* $\lim x_n = 0$, *то*

$$\lim \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$$

Доказательство. Если дуга лежит в первой четверти, то любая вписанная ломаная удовлетворяет условиям монотонности леммы 13.2, поэтому для любой дуги ее длина не превосходит суммы длин координатных проекций. Откуда получаем такое неравенство

$$x \le \sin x + (1 - \cos x) = \sin x + 2\sin^2 \frac{x}{2} \tag{13.4}$$

В результате для x_n из первой четверти получаем следующие неравенства

$$1 - \frac{2\sin^2 \frac{x_n}{2}}{x} \le \frac{\sin x_n}{x_n} < 1$$

и лемма о милиционерах дает нужный результат. □

Теорема 3. *Для любого* $x < \pi$ *имеет место равенство*

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^k}$$

Доказательство. Так как

$$2^n \sin \frac{x}{2^n} \cos \frac{x}{2^n} = 2^{n-1} \sin \frac{x}{2^{n-1}},$$

то

$$2^n \sin \frac{x}{2^n} \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{x}{2^k} = \sin x \tag{13.5}$$

Так как $\frac{x}{2^n} \to 0$, то первый замечательный предел дает

$$\lim_{n\to\infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n} = \lim_{n\to\infty} x \frac{\sin \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} = x,$$

и переход к пределу в неравенстве (13.5) при $n \to \infty$ дает обещанное. □

Так как косинус угла убывает в первой четверти, то и произведение косинусов также убывает. Поэтому из доказанной теоремы вытекает монотонность отношения $\frac{\sin x}{x}$.

Лемма 13.4. *Если* $\{x_n\}$ *бесконечно-малая, то* $\sin x_n$ *тоже.*

Доказательство. Это вытекает из неравенства $|\sin x| < |x|$. □

Задачи.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} n \sin \frac{x}{n}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} n \arcsin \frac{x}{n}$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x-\cos 3x}{\sin x^2}$

14 Второй замечательный предел

Число e Вторым замечательным пределом называется $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ предел этой последовательности обозначается e и играет исключительно важную роль в математике. Число e появилось в математике впервые как основание натуральных логарифмов.

Лемма 14.1. *Если $\{x_n\}$ бесконечно-малая, то $\ln(1+x_n)$ тоже.*

Доказательство. Если x_n неотрицательны то это вытекает из неравенства $\ln(1+x)<x$ □

Лемма 14.2. *Для любой бесконечномалой последовательность $x_n \to 0$ имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x_n)}{x_n}=1$$

Доказательство. Действительно, нам известны неравенства

$$\frac{x_n}{1+x_n}\le\ln(1+x_n)\le x_n$$

Деля эти неравенства на x_n и переходя к пределу в полученных неравенствах, с помощью леммы о милиционерах получаем нужный результат. □

Теорема 1 (непрерывность логарифма). *Последовательность положительных чисел x_n, сходится к положительному числу x в том и только том случае, когда последовательность логарифмов $\ln x_n$ сходится к $\ln x$*

Доказательство.

$$\ln x_n-\ln x=\ln\frac{x_n}{x}=\ln\left(1+\frac{x_n-x}{x}\right)=\frac{\ln\left(1+\frac{x_n-x}{x}\right)}{\frac{x_n-x}{x}}\frac{x_n-x}{x}$$

Откуда в силу леммы 14.2, следует, что бесконечная малость разности $x-x_n$ равносильна бесконечной малости разности логарифмов $\ln x_n-\ln x$. □

Теперь, обещанный результат, о том что последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ имеет пределом основание натуральных логарифмов вытекает из следующего, более общего результата

Теорема 2. *Для любого действительного числа x последовательность $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ сходится и $\ln\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=x$*

Доказательство. Сходимость последовательности $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ в силу теоремы о непрерывности логарифма равносильна сходимости последовательности ее логарифмов. А последовательность логарифмов $\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ сходится к x в силу леммы 14.2. Поэтому доказательство завершается ссылкой на теорему непрерывности логарифма. □

Теорема 3 (о пределе степени). *Пусть $x_n\to x>0$, $y_n\to y$. Тогда $x_n^{y_n}\to x^y$*

Доказательство. В силу теоремы **1** достаточно доказать, что последовательность логарифмов $\ln(x_n^{y_n}) = y_n \ln x_n$ сходится к $y \ln x$. Это так в силу теоремы о пределе произведения и равенства $\lim \ln x_n = x$, обеспечиваемого все той же теоремой **1**. $\square$

Напомним, что мы ранее определяли функцию экспонента посредством экспоненциального ряда и доказали для нее теорему сложения.

Теорема 4. *Для любого числа x выполнено равенство* $\ln \exp x = x$

Доказательство. Для любого натурального n из известных нам свойств экспоненты и логарифма вытекает равенство $\ln \exp x = n \ln \exp \frac{x}{n}$. Поэтому справедливо равенство $\lim n \ln \exp \frac{x}{n} = \ln expx$. Предел в левой части модно вычислить с помощью следующих двух элементарных пар неравенств об экспоненте и логарифме называемых нами *базовыми оценками* для экспоненты и логарифма.

$$1 + x \leq \exp x \leq \frac{1}{1-x} \qquad \frac{x}{1+x} \leq \log(1+x) \leq x$$

Эти неравенства справедливы для положительных x меньших единицы. Требуемое тождество, очевидно, достаточно доказать для положительных x ибо функция $\log \exp(x)$ нечетна ($\log \exp -x = \log \frac{1}{\exp x} = -\log \exp x$) как и функция x. Итак, в дальнейшем считаем x положительным. Рассмотрим натуральное n большее чем x. Тогда $x/n < 1$ и пользуясь верхней базовой оценкой для экспоненты получаем $\exp x/n \leq \frac{1}{1-x/n}$. И применяя к обоим частям логарифм имеем:

$$\log(\exp(x/n) \leq \log \frac{1}{1-x/n} = \log\left(1 + \frac{x/n}{1-x/n}\right) \leq \frac{x/n}{1-x/n}$$

где последний переход использует верхнюю базовую оценку для логарифма. Умножая на n эти неравенства слева мы получаем $n \log \exp(x/n) = \log(\exp(x/n)^n) = \log \exp x$, а справа число $\dfrac{x}{1-x/n}$, которое при $n \to \infty$ имеет пределом x.

Откуда предельным переходом получаем неравенство $\log \exp x \leq x$.

Для доказательства обратного неравенства начнем с неравенства $1 + x/n \leq \exp x/n$ (нижняя оценка для экспоненты) Применим к обеим частям логарифм и пользуясь нижней базовой оценкой логарифма

$$\frac{x/n}{1+x/n} \leq \log(1 + x/n) \leq \log \exp x/n$$

Умножаем эти неравенства на n справа, как и выше получаем $\log \exp x$, а слева число $\dfrac{x}{1+x/n}$, которое имеет x своим пределом. Поэтому заключаем $\log \exp x \geq x$. Что и требовалось доказать.

$\square$

Следствие 5. *Для любого положительного x справедливо равенство*

$$\exp \log x = x$$

Доказательство. Логарифм имеет свойство строгой монотонности. То есть логарифмы различных чисел различны. Поэтому для доказательства равенства чисел x и $\exp\log x$ достаточно убедиться в равенстве их логарифмов: $\log(\exp\log x) = \log\exp(\log x) = \log x$. $\square$

В качестве следствия получаем из доказанной теоремы при $x = 1$

Следствие 6. *Предел последовательность* $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *совпадает с суммой ряда* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

Лемма 14.3. *Для любого натурального числа n справедливы неравенства*

$$\frac{1}{n+1} < en! - [en!] < \frac{1}{n}$$

Доказательство. $en! = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{n!}{k!}$. Частичная сумма $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$ является целым числом. Окончание ряда $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!}$ почленно мажорируется геометрическим рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{n}$. С другой стороны первое слагаемое окончания есть $\frac{1}{n+1}$. Следовательно, окончание имеет сумму между $\frac{1}{n+1}$ и $\frac{1}{n}$. $\square$

Теорема 7. *Число e иррационально*

Доказательство. Предположим, напротив, что $e = \frac{p}{q}$, где p и q целые. Тогда $eq!$ тоже целое. Но оно не может быть целым в силу леммы 14.3. $\square$

Задачи.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^n$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \sin\frac{1}{n}\right)^n$
7. $\lim\limits_{n\to\infty} \cos^{n^2} \frac{1}{n}$
8. $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \operatorname{tg} 2n)^n$

15 Ряды и пределы

Приведенное ранее доказательство Эйлера опирается на интуитивные понятия бесконечно-малой и бесконечно-большой величин. Эти понятия трудно формализовать, и наиболее тонким моментом в доказательстве является замена бесконечного числа слагаемых на бесконечно-мало отличающиеся от них. Следующий пример показывает, что вообще говоря, этого делать нельзя:

$$1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$$

Если подставить в это равенство бесконечно большое n, то мы увидим, что сумма бесконечного числа бесконечно-малых может быть единицей. Поэтому доказательство Эйлера неполно. Изложенная ниже теория, созданная два века спустя после Эйлера замечательным немецким математиком Вейерштрассом, позволяет восполнить все пробелы в рассуждениях Эйлера.

Условно сходящиеся ряды

Так как частичные суммы сходящегося положительного ряда образуют монотонно возрастающую последовательность, имеющую своей точной верхней гранью полную сумму, то из теоремы о пределе монотонной последовательности получаем

$$\lim \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{15.1}$$

И так как частичные произведения последовательности больших единицы чисел образуют монотонно возрастающую последовательность, имеющую своей точной верхней гранью полное произведение, то

$$\lim \prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1}^{\infty} a_k \tag{15.2}$$

Таким образом понятие предела последовательности позволяет объединить теории рядов и бесконечных произведений.

Теорема 1. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ *сходится абсолютно, то* $\lim \sum\limits_{k=1}^{n} z_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$.

Доказательство. Для положительных рядов справедливость теоремы была установлена выше. Если все z_k вещественны, то $z_k = z_k^+ - z_k^-$. В силу теоремы о сумме пределов имеем

$$\lim \sum_{k=1}^{n} z_k^+ + \lim \sum_{k=1}^{\infty} (-z_k^-) = \lim \sum_{k=1}^{n} (z_k^+ - z_k^-) = \lim \sum_{k=1}^{n} z_k, \tag{15.3}$$

А так как $\lim \sum\limits_{k=1}^{n} z_k^+ = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k^+$ и $\lim \sum\limits_{k=1}^{n} z_k^- = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k^-$ в силу леммы **??**, то левая часть в (15.3) равна $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$, что доказывает теорему для вещественного случая.

Тогда в общем случае имеем $\lim \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Re} z_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_k$ и $\lim \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Im} z_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_k$. Поэтому из теоремы о сумме пределов получаем $\lim \sum\limits_{k=1}^{n} z_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_k + i \sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$. $\square$

Условно сходящиеся ряды Числовой ряд называется *условно сходящимся*, если последовательность частичных сумм этого ряда сходится, и ее предел и называется суммой ряда.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \dots a_n)$$

Условно сходящиеся ряды удовлетворяют правилам рекурсии, почленного сложения и умножения, что непосредственно вытекает из соответствующих свойств пределов.

Теорема 2 (о необходимом условии сходимости ряда). *Если числовой ряд сходится то последовательность его членов стремится к нулю.*

Доказательство. Если A_n означает сумму первых n членов ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Тогда $\lim A_{n+1} = \lim A_n$ откуда $\lim a_n = \lim(A_n - (A_{n-1}) = 0$. $\square$

Лемма 15.1. *Всякая бесконечно малая последовательность содержит наибольший по абсолютной величине элемент.*

Доказательство. Пусть z_n ненулевой член последовательности. Тогда имеется конечное число членов последовательности по модулю больших $|z_n|$. Из них можно выбрать наибольшее по модулю. Оно будет наибольшим по модулю для всей последовательности. $\square$

Теорема 3 (Вейерштрасс). *Если сходится ряд максимумов модулей бесконечно-малых последовательностей, то почленная сумма этих последовательностей является бесконечно-малой.*

Доказательство. Пусть дана двойная последовательность $\{x_n^j\}_{j,n=1}^{\infty}$, с конечной суммой максимумов $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \max_{n\in\mathbb{N}} |x_n^j| < \infty$, в которой бесконечно-малыми является при фиксированном j являются последовательности $\{x_n^j\}_{n=1}^{\infty}$.

Пусть дано положительное ε. Конечность суммы ряда максимумов позволяют фиксировать такое натуральное N для которого

$$\sum_{j=N}^{\infty} \max_{n\in\mathbb{N}} |x_n^j| < \varepsilon/2 \tag{15.4}$$

Далее для любого $j < N$ в силу бесконечно-малости $\{x_n^j\}_{n=1}^{\infty}$ найдется такое N_j, что при $n > N_j$.

$$|x_n^j| < \frac{\varepsilon}{2N} \tag{15.5}$$

Пусть M равно максимуму из N_j ($j < N$) Тогда для любого $n > M$ из неравенств (15.4) и (15.5) вытекает следующая оценка суммы

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} x_n^j\right| \leq \left|\sum_{j=1}^{N-1} x_n^j\right| + \left|\sum_{j=N}^{\infty} x_n^j\right| \leq \sum_{j=1}^{N-1} |x_n^j| + \sum_{j=N}^{\infty} \max_{n\in\mathbb{N}} |x_n^j| \leq$$
$$\leq \frac{(N-1)\varepsilon}{2N} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Откуда и вытекает бесконечная малость последовательности сумм $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_n^j$.

□

Назовем *отклонением* сходящейся последовательности $\{z_n\} \to a$ максимум из модулей разностей $|z_n - a|$

Теорема 4 (о пределе суммы ряда). *Пусть дана двойная последовательность $\{x_n^j\}$, такая что*

1. *при любом j существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^j$*
2. *сходится ряд пределов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lim\limits_{n\to\infty} x_n^j$.*
3. *и сходится ряд отклонений $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \max_{n\in\mathbb{N}} |x_n^j - \lim\limits_{n\to\infty} x_n^j|$*

тогда

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j\in J} x_n^j = \sum_{j\in J} \lim_{n\to\infty} x_n^j,$$

(в частности предел слева существует).

Доказательство. Нам нужно доказать, что бесконечномалой (по n) является разность

$$\sum_{j\in J} x_n^j - \sum_{j\in J} \lim_{n\to\infty} x_n^j = \sum_{j\in J} (x_n^j - \lim_{n\to\infty} x_n^j),$$

что вытекает из теоремы о сумме ряда бесконечномалых. □

Комплексная экспонента Когда Эйлер, в разложении $(\cos\varphi/n + i\sin\varphi/n)^n$ заменяет косинус единицей, а синус дуги самой дугой, то все выражение заменяется на $(1 + i\varphi/n)^n$. Поэтому Эйлер фактически использует два равенства: первое

$$\lim_{n\to\infty} (1 + i\varphi/n)^n = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

и второе

$$\lim_{n\to\infty} (1 + i\varphi/n)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^k}{k!}$$

Доказательство второго равенства основано на теореме о пределе ряда.

Теорема 5. *Для любого комплексного z имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$$

Доказательство. По биному Ньютона

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}\frac{z^k}{k!}$$

Тогда k-ый член этого разложения имеет пределом k-ый член экспоненциального ряда. Поэтому теорема вытекает из теоремы о пределе суммы ряда последовательностей, потому что, отклонение k-ой последовательности от ее предела не превосходит $|z|^k/k!$. □

Лемма 15.2. *Если $z_n \to z$, то $|z_n| \to |z|$ и $(\lim_{n\to\infty}\arg z_n - \arg z) = 2\pi n$, если сходится* $\arg z_n$

Доказательство. Первое утверждение вытекает из очевидного неравенства

$$||z| - |z_n|| \le |z - z_n|$$

Если $\varphi = \lim_{n\to\infty}\arg z_n$, то второе утверждение равносильно равенствам

$$|z|\cos\varphi = \operatorname{Re} z \qquad |z|\sin\varphi = \operatorname{Re} z,$$

которые получаются предельным переходом $n \to \infty$ из равенств

$$|z_n|\cos\varphi_n = \operatorname{Re} z_n \qquad |z_n|\sin\varphi_n = \operatorname{Re} z_n,$$

где $\varphi_n = \arg z_n$ ввиду непрерывности синуса и косинуса. □

Функцию экспонента определяют для любого комплексного числа z посредством ряда

$$\exp z = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$$

Теперь формула Эйлера вытекает из следующей теоремы

Теорема 6. *Для любого комплексного z имеет место равенство*

$$\exp z = e^{\ln \operatorname{Re} z}(\cos \operatorname{Im} z + i\sin \operatorname{Im} z)$$

Доказательство. Пусть $z = x+iy$. Модуль $\exp z$ определяется на основании теоремы **5**

$$|\exp z| = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{z}{n}\right|^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{n/2}$$

Логарифм этого предела находится с помощью леммы 14.2 следующей выкладкой

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)}{2} = x$$

Для аргументов имеем следующее соотношение

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = n\arcsin\frac{y}{n\sqrt{(1+x/n)^2+(y/n)^2}}$$

Для предельного перехода в этом раенстве можно воспользовавшись первым замечательным пределом убрать арксинус. Тогда предел, очевидно, определится как y. $\square$

О перестановках ряда.

Теорема 7 (Риман). *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится условно и не сходится абсолютно, тогда для любого числа* A *существует такая перестановка* $\varphi\colon N \to N$ *натурального ряда, что* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = A$

Доказательство. Обозначим n-ый по порядку неотрицательный член нашего ряда через x_n и n-ый по порядку отрицательный член через y_n. Тогда последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ являются бесконечно малыми как подпоследовательности бесконечно малой последовательности и ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^+$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_n = -\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n^-$ расходятся в силу условия теоремы. Ибо сходимость одного из них влечет сходимость другого ввиду сходимости разности $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k^+ - a_k^-)$. По индукции определим две растущие последовательности $\{N_k\}$ и $\{M_k\}$ натуральных чисел так чтобы выполнялись следующие условия.

1. $\sum\limits_{k=1}^{N_k} x_k + \sum\limits_{k=1}^{M_k-1} y_k > A$
2. $\sum\limits_{k=1}^{N_k} x_n + \sum\limits_{k=1}^{M_k} y_k \leq A$
3. $\sum\limits_{k=1}^{N_{k+1}-1} x_n + \sum\limits_{k=1}^{M_k} y_n \leq A$

Полагаем N_1 наименьшее из чисел для которых $\sum\limits_{k=1}^{N_1} x_n > A$, потом в качестве M_1 берем наименьшее из чисел, для которого выполнено второе неравенство. Если уже определены N_k и M_k, то сначала определяем N_{k+1} как первое число для которого выполнено первое условие.

Тогда следующий ряд

$$x_1 + x_2 + \dots x_{N_1} + y_1 + \dots + y_{M_1} + x_{N_1+1} + \dots + x_{N_2} + y_{M_1+1} + \dots \tag{15.6}$$

является перестановкой исходного и последовательность частичных сумм s_k первых $N_k + M_k$ членов этого ряда не превосходя A отличается от него меньше чем на y_{M_k}. С другой стороны последовательность S_k сумм первых $N_{k+1} + M_k$ превосходя A отличается от него не более чем на $x_{N_{k+1}}$. А так как все члены переставленного ряда с номерами из промежутка

$[N_k + M_k, N_{k+1} + M_k]$ положительны, то его частичные суммы для этого промежутка зажаты между s_k и S_k и отличаются от A меньше чем на максимум из x_{N_k} и y_{M_k}.

Аналогичные оценки справедливы и для промежутка $[N_{k+1}+M_k, N_{k+1}+M_{k+1}]$. Откуда видно, что разность между частичными суммами переставленного ряда и A стремится к нулю.

□

Задачи.

1. Объясните почему теорема о сумме ряда бесконечно-малых не применима в случае парадокса представления единицы в виде суммы бесконечно-малых $1 = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}$